

Кафедра высшей математики

Определенный интеграл.  
Методические указания для студентов заочного  
обучения всех факультетов

Москва 2007

## Оглавление

	стр.
Предисловие	3
1. Определенный интеграл – интеграл по фигуре	4
1.1. Основные понятия	4
1.2. Основные свойства интеграла	6
2. Вычисление определенного интеграла	7
2.1. Интеграл по промежутку (однократный интеграл)	7
2.2. Криволинейный интеграл первого рода (интеграл по длине дуги)	15
2.3. Двойной интеграл в декартовой системе координат	18
2.4. Двойной интеграл в полярной системе координат	23
2.5. Интеграл по поверхности (первого рода)	26
2.6. Тройной интеграл	30
3. Приложение определенного интеграла в геометрии	34
3.1. Площадь плоской фигуры	34
3.2. Площадь поверхности	36
3.2.1. Площадь цилиндрической поверхности	38
3.2.2. Площадь поверхности вращения	40
3.3 Объем тела	43
3.3.1. Объем цилиндрического тела	43
3.3.2. Вычисление объема тела с помощью тройного интеграла	46
3.3.3. Объем тел вращения	48
4. Приложение определенного интеграла в механике	51
4.1. Определение массы фигуры	51
4.2. Определение статических моментов, моментов инерции и центра тяжести	53
Литература	64

## Предисловие

Данная работа входит цикл математических указаний «Элементы высшей математики». Рассмотрим определенные интегралы: однократные, двукратные и трехкратные, а также криволинейный интеграл первого и второго рода, поверхностный интеграл первого рода, несобственные интегралы. Представлены приложения определенного интеграла в геометрии и механике. Изначальный материал соответствует программе курса «Высшая математика» для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

Работа предназначена для самостоятельной подготовки студентов к практическим занятиям, в особенности, при заочной форме обучения. Она может быть полезна при выполнении текущих заданий и типовых расчетов, подготовке к контрольным работам и коллоквиумам.

С этой целью в наглядной и доступной форме дана краткая (без доказательств) сводка необходимых теоретических сведений.

Текст методических указаний написан старшим преподавателем кафедры высшей математики О.М. Ворожейкиной и профессором О.А. Егорычевым.

## 1. Определенный интеграл – интеграл по фигуре.

### 1.1. Основные понятия.

При решении практически каждой задачи в области строительной механики, механики деформируемого твердого тела, сопротивления материалов, физики и многих других инженерных областей требуется вычисление некоторой суммарной характеристики рассматриваемого процесса или объекта, в зависимости изменения параметров от координат и времени.

К таким задачам относятся, например, вычисление площади фигуры и площади поверхности, объем тел различной конфигурации, массы, статические моменты и моменты инерции, определение центра тяжести, определение работы силы, определение силы давления и нахождение пути, пройденного объектами с изменяющейся скоростью и т.д.

Отвлекаясь от физической сущности объектов и процессов, рассмотрим общее правило приводящее к понятию определенного интеграла – интеграла по фигуре.

Рассмотрим следующие типы фигур:

1) отрезок  $[a, b]$  на оси (рис. 1)

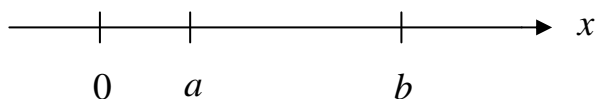


Рис. 1

2) дуга линии  $\Gamma$  на плоскости или в пространстве (рис. 2);

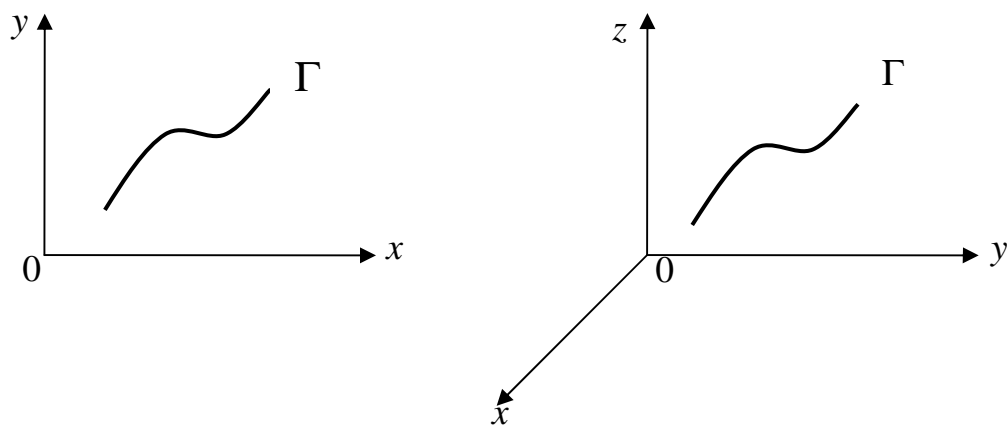


Рис. 2

3) область  $S$  - на плоскости (рис. 3) и поверхность  $Q$  - в пространстве (рис. 4);

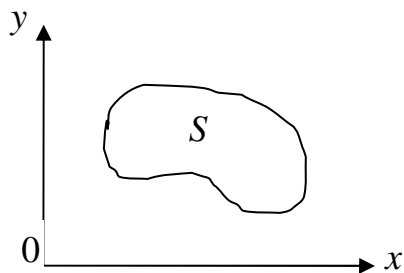


Рис. 3

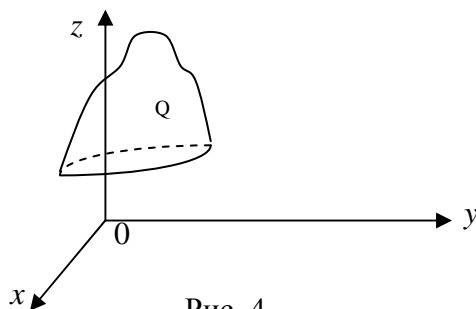


Рис. 4

4) пространственное тело  $V$  (рис. 5)

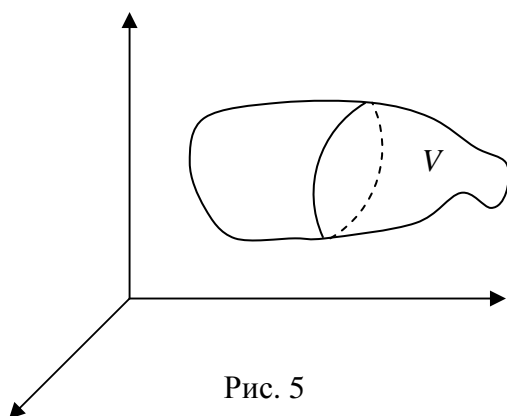


Рис. 5

Все фигуры предполагаются замкнутыми, т.е. содержащими наряду со своими внутренними точками и точки границы, и ограниченными (расстояние любой точки фигуры от начала координат меньше некоторой постоянной величины).

Каждой фигуре соответствует ее мера: отрезку и линии – длина, плоской области и поверхности в пространстве – площадь, пространственному телу – объем. Максимальное из расстояний между двумя точками фигуры назовем ее диаметром.

Рассмотрим фигуру  $E$  с мерой  $\varepsilon$ . В каждой т.  $P$  фигуры задана функция  $f(P)$ . Разделим фигуру на  $n$  частей произвольным образом. Введем обозначения  $\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2, \dots, \Delta\varepsilon_n$  – меры полученных частей;  $d_1, d_2, \dots, d_n$  – диаметры частей;  $\lambda$  – максимальный из диаметров частей. На каждой части выберем по одной произвольной точке  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , вычислим значение функции  $f(P)$  в этих точках. Умножим найденные значения функций на меры соответствующих частей и сложим полученные произведения:

$$f(P_1)\Delta\varepsilon_1 + f(P_2)\Delta\varepsilon_2 + \dots + f(P_n)\Delta\varepsilon_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta\varepsilon_i$$

Построенная таким образом сумма называется  $n$ – $\varepsilon$  интегральной суммой.

Предел  $n$ – $\varepsilon$  интегральной суммы при стремлении наибольшего диаметра частичных фигур к нулю ( $\lambda \rightarrow 0$ ), при  $n \rightarrow \infty$  называется определенным интегралом.

$$\int_E f(P)d\varepsilon = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta\varepsilon_i$$

Для различных типов фигур получим следующие интегралы (таблица 1)

Таблица 1.

Фигура	Интеграл	
	Название	Обозначение
Отрезок $[a, b]$ на оси $OX$ ; $\Delta\varepsilon_i = \Delta x_i$ ; $f(P) = f(x)$	Определенный однократный интеграл по промежутку	$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$
Линия $\Gamma$ в пространстве $\Delta\varepsilon_i = \Delta L_i$ $f(P) = f(x, y, z)$	Криволинейный интеграл первого рода; интеграл по длине дуги	$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta L_i = \int_{\Gamma} f(x, y, z)dL$ $dL$ – дифференциал длины дуги
Область $S$ на плоскости $\Delta\varepsilon_i = \Delta S$	Двойной интеграл	$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i = \iint_S f(x, y)dS$

$f(P) = f(x, y)$		
Поверхность $Q$ в пространстве $\Delta \varepsilon_i = \Delta q$ $f(P) = f(x, y, z)$	Поверхностный интеграл (первого рода)	$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(P_i) \Delta q_i = \iint_Q f(x, y, z) dq$
Тело $V$ в пространстве $\Delta \varepsilon_i = \Delta V_i$ $f(P) = f(x, y, z)$	Тройной интеграл	$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(P_i) \Delta V_i = \iiint_V f(x, y, z) dV$

## 1.2. Основные свойства интегралов

1. Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых.

$$\int_E [f(P) \pm \varphi(P)] d\varepsilon = \int_E f(P) d\varepsilon \pm \int_E \varphi(P) d\varepsilon$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int_E kf(P) d\varepsilon = k \int_E f(P) d\varepsilon, \quad k = \text{const}$$

3. Если фигуру разбить на нечетное число частей, то интеграл по целой фигуре равен сумме интегралов по частям.

Так, для фигуры  $E$ , состоящий из двух частей  $E_1$  и  $E_2$ , имеем:

$$\int_E f(P) d\varepsilon = \int_{E_1} f(P) d\varepsilon + \int_{E_2} f(P) d\varepsilon$$

4. Если функция  $f(P)$  тождественно равна единице на фигуре  $E$ , т.е.  $f(P) = 1$ , то интеграл от нее дает меру фигуры  $\int_E d\varepsilon = \varepsilon$ .

$$\int_a^b dx = (b - a) - \text{длина отрезка } [a, b];$$

$$\int_{\Gamma} dL = L - \text{длина линии } \Gamma;$$

$$\iint_S dS = S - \text{площадь области } S;$$

$$\iint_Q dq = q - \text{площадь поверхности } Q;$$

$$\iiint_V dV = V - \text{объем тела } V.$$

5. Пусть значение функции в любой точке  $P$  фигуры  $E$  не больше числа  $M$  и не меньше числа  $m$  ( $m \leq f(P) \leq M$ ), то для значения интеграла от этой функции по фигуре  $E$  справедлива оценка

$$m\varepsilon \leq \int_E f(P) d\varepsilon \leq M\varepsilon$$

6. Если функция на фигуре не имеет знака, то интеграл по фигуре от этой функции представляет собой число того же знака, что и функция.

7. Пусть две функции связаны неравенством  $f(P) \leq \varphi(P)$ , то и интегралы от этих функций связаны аналогичным неравенством:

$$\int_E f(P) d\varepsilon \leq \int_E \varphi(P) d\varepsilon$$

8. Модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля функции:

$$\left| \int_E f(P) d\varepsilon \right| \leq \int_E |f(P)| d\varepsilon$$

9. Если функция  $f(P)$  непрерывна на замкнутой ограниченной фигуре  $E$ , то найдется такая т.  $P_0$  на этой фигуре, что значение функции в т.  $P_0$  будет равно среднему значению функции на фигуре:

$$f(P_0) = f_{\bar{n}\delta}; \quad f_{\bar{n}\delta} = \frac{\int_E f(P) d\varepsilon}{\varepsilon}$$

Все вышеперечисленные свойства определенного интеграла справедливы для всех видов интегралов, представленных в таблице 1.

## 2. Вычисление определенного интеграла

### 2.1. Интеграл по промежутку (однократный интеграл)

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная неотрицательная функция  $f(x) > 0$ . Фигура, ограниченная графиком функции  $f(x)$ , отрезками прямых  $x = a$ ,  $x = b$  и отрезком  $[a, b]$  оси  $OX$  (рис. 6) называется криволинейной трапецией.

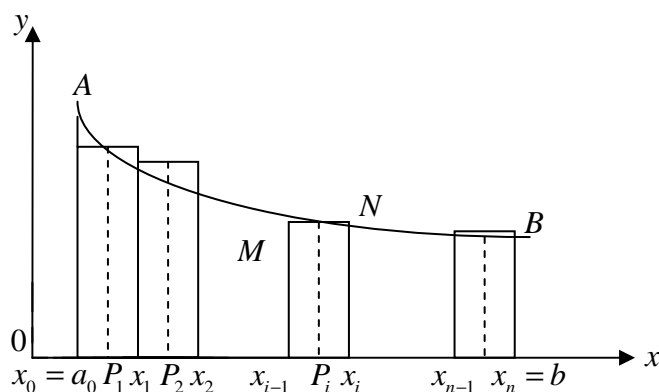


Рис. 6

Покажем, что интегральная сумма  $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$  есть приближенная площадь криволинейной трапеции.

Разобьем отрезок  $[a, b]$  точками  $x_0 = a$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , ...,  $x_n = b$  на  $n$  произвольных отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$ , выберем на каждом из них произвольную т.  $P_i$  и вычислим значение функции в т.  $P_i$   $f(P_i)$ . Примем приближенно, что площадь произвольной плоскости  $MN x_{i-1} x_i$  равна площади прямоугольника с основаниями  $[x_{i-1}, x_i]$  и высотой  $f(P_i)$

$\Delta S_i = f(P_i) \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

Отсюда площадь всей криволинейной трапеции  $S$  приближенно равна:

$$S \cong f(P_1) \Delta x_1 + f(P_2) \Delta x_2 + \dots + f(P_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i$$

Очевидно, что чем больше точек деления на  $[a, b]$  мы выберем, тем уже будут полоски, на которые разбита фигура и тем ближе к истинному будет приближение.

Следовательно, площадь криволинейной трапеции может быть найдена как предел суммы  $\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i$ , когда число точек делений стремится к бесконечности ( $n \rightarrow \infty$ ), а длина наибольших из частей  $\Delta x_i \rightarrow 0$ .

$$S = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i$$

Заметим, что этот предел не зависит от способа деления отрезка  $[a, b]$  на части и от выбора т.  $P_i$ .

Составленная таким образом сумма  $\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i$  называется  $n$ - $\epsilon$  интегральной суммой, а ее предел называется определенным интегралом  $\int_a^b f(x) dx$ , где  $x = a$  - нижний предел интегрирования,  $x = b$  - верхним предел интегрирования.

Определенным однократным интегралом называется предел  $n$ - $\epsilon$  интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшего диаметра, т.е. стремлении к нулю длины наибольшей части деления:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i$

Здесь  $f(x)$  называется подынтегральной функцией,  $f(x) dx$  - подынтегральным выражением.

При изучении неопределенного интеграла мы узнали, что если функция  $f(x)$  непрерывна в некоторой области, то неопределенный интеграл от этой функции имеет первообразную, т.е.  $\int f(x) dx = F(x) + C$ ,  $C = const$ .

Для вычисления неопределенного интеграла следует пользоваться таблицей основных интегралов (таблица 2.)

Таблица 2.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\int C dx = C$ ;                                      | 2. $\int 1 dx = x + C$ ;                                     |
| 3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ ;   | 4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$ ;                        |
| 5. $\int a^n dx = \frac{a^n}{\ln a} + C; n \neq -1$ ;     | 6. $\int e^n dx = e^n + C$ ;                                 |
| 7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ;                       | 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$ ;                           |
| 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ ; | 10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ ; |



$$11. \int shx dx = chx + C;$$

$$12. \int chx dx = shx + C;$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

При вычислении однократного определенного интеграла используются правила вычисления неопределенного интеграла и формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

или для удобства записи

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2.1)$$

т.е. для вычисления определенного интеграла сначала следует вычислить неопределенный интеграл и определить первообразную  $F(x)$ , а затем подставить пределы.

Например: (декартовы координаты  $y = f(x)$ )

$$2.1. \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = \ln e = 1;$$

$$2.2. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4};$$

$$2.3. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \tg \frac{\pi}{4} - \tg \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$2.4. \int_1^3 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} \Big|_1^3 = \frac{1}{\ln 5} (5^3 - 5) = \frac{120}{\ln 5};$$

$$2.5. \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

заменим переменную  $x$ ;

$$x = 2 \sin t; \quad dx = 2 \cos t.$$

Определим новые пределы интегрирования, т.е. пределы изменения переменной  $t$  при изменении  $x$  от 1 до 2

$$a) \quad x_1 = 1 \rightarrow 1 = 2 \sin t_1 \rightarrow \sin t_1 = \frac{1}{2} \rightarrow t_1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

$$б) \quad x_2 = 2 \rightarrow 2 = 2 \sin t_2 \rightarrow \sin t_2 = 1 \rightarrow t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos t}{2} dt = 2 \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 2 \frac{\pi}{2} \right) - 2 \left( \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin 2 \frac{\pi}{6} \right) = \pi + \sin \pi - \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2.6. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx =$$

Произведем замену переменной

$$\sqrt{x^2+1} = t; \quad x = \sqrt{t^2-1}; \quad dx = \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$x_1 = \sqrt{3} \rightarrow t_1 = 2; \quad x_2 = \sqrt{8} \rightarrow t_2 = 3$$

$$= \int_2^3 \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}} = \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2-1} = \int_2^3 \left( 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \left( t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_2^3 = \left( 3 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3-1}{3+1} \right| \right) - \left( 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2-1}{2+1} \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

$$2.7. \int_0^1 x e^{-x} dx =$$

Для вычисления воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dV = uV \Big|_a^b - \int_a^b V du$$

Положим  $u = x$ ;  $du = dx$

$$dV = -e^{-x} dx; \quad V = -e^{-x}$$

Получим:

$$= \left( -x e^{-x} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^{-0} = 2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

$$2.8. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} u=x; du=dx \\ dV = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = -\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}; V = \frac{1}{\cos x} \end{array} \right| = \frac{x}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} - \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}.$$

2.9. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией  $y = \ln x$ , осью  $OX$  и прямыми  $x=1$  и  $x=2$  (рис. 7)

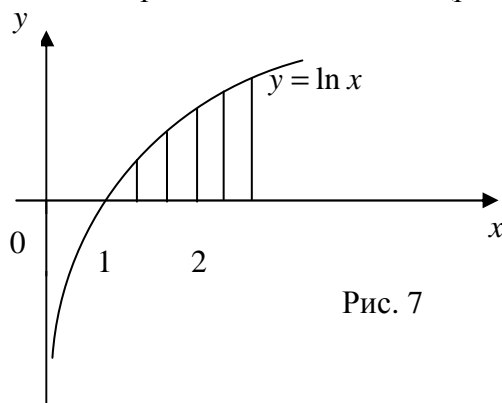


Рис. 7

$$S = \int_1^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx; v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx =$$

$$= 2 \ln 2 - \ln 1 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1;$$

Рассмотрим случай, когда криволинейная трапеция в дискретной системе координат определяется функцией  $x = \varphi(y)$ , отрезками  $[c, d]$  и прямыми  $y = c$  и  $y = d$  (рис. 8).

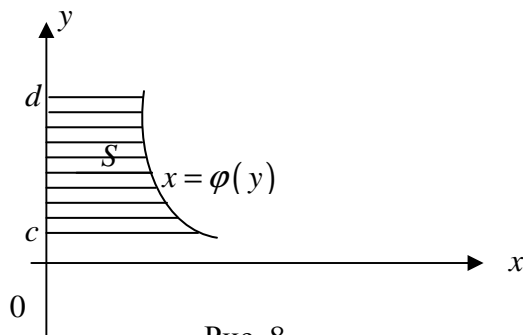
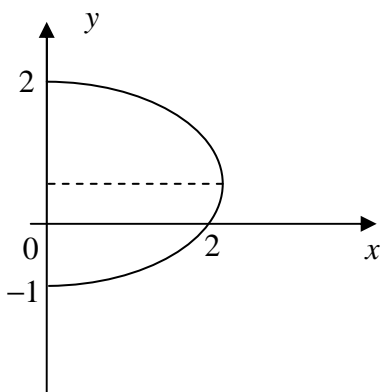


Рис. 8

Тогда площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \varphi(y) dy \quad (2.2)$$

2.10. Вычислить площадь фигуры, заключенной между осью  $OY$  и параболой  $x = 2 + y - y^2$  (рис. 9.)



Решение. Фигура является криволинейной трапецией, основание которой есть отрезок  $[-1; 2]$  на оси  $OY$ .

$$S = \int_{-1}^2 x(y) dy = \int_{-1}^2 (2 + y - y^2) dy = \left( 2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

Площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис.10, вычислим по формуле:

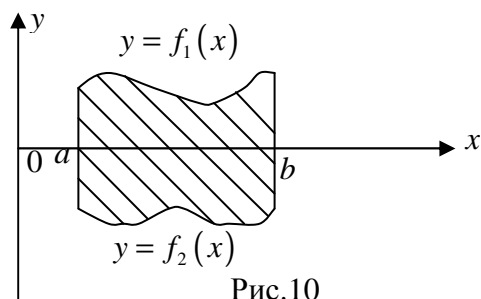
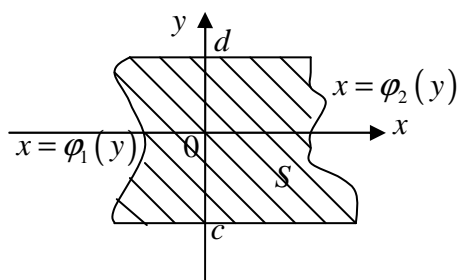


Рис.10

$$S = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx. \quad (2.3)$$

Для случая, показанного на рис.11 по формуле:



$$S = \int_c^d [\varphi_1(y) - \varphi_2(y)] dy \quad (2.4)$$

2.11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $x = y^2$ ;  $x = \frac{y^2}{4}$ ;  $y = 2$  (рис. 12).

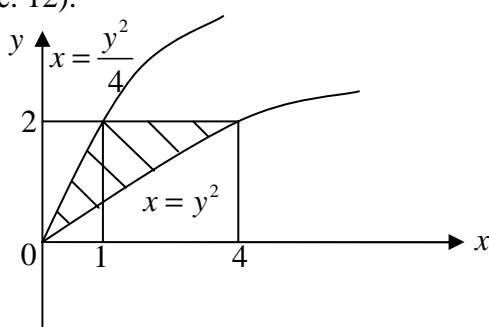


Рис. 12

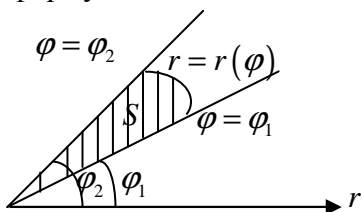
Решение.

$$S = \int_0^2 \left( y^2 - \frac{y^2}{4} \right) dy = \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^3}{12} \right) \Big|_0^2 = 2$$

Полярные координаты ( $r = r(\varphi)$ )

В полярной системе координат площадь криволинейного сектора (трапеции), ограниченного функцией  $r = r(\varphi)$  и лучами  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$  (рис. 13), вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi \quad (2.5)$$



При этом формулы перехода от декартовых к полярным имеют вид

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi;$$

и от полярных к декартовым

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

2.12. Вычислить площадь, ограниченную ленинискатой  $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$  (рис. 14)

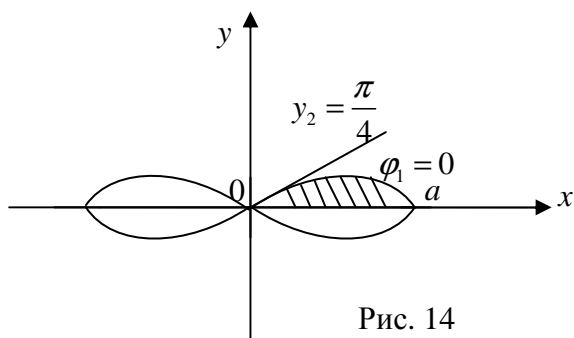


Рис. 14

Решение:

Радиус-вектор опишет четверть искомой площади, если  $\varphi$  меняется от 0 до  $\frac{\pi}{4}$ .

$$S = 4 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \left. \frac{\sin 2\varphi}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Если кривая задана параметрически:

$x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , где  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $x(t_1) = a$ ,  $x(t_2) = b$ ,

то после замены переменных формула для вычисления площади криволинейной трапеции примет вид:

$$S = \int_a^b y(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt \quad (2.6)$$

2.13. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом

$x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$

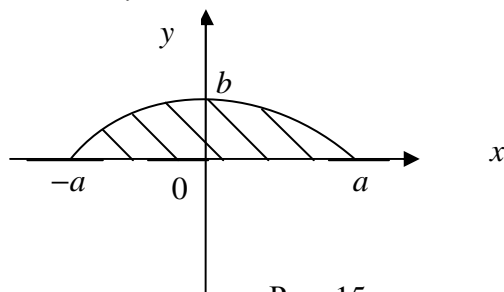


Рис. 15

Решение: Вычислим площадь верхней половины эллипса (рис. 15) и удвоим.

Здесь  $x$  изменяется от  $-a$  до  $+a$ , следовательно,  $t$  изменяется от  $\pi$  до 0.

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{\pi}^0 (b \sin t) (-a \sin t dt) = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= 2ab \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

Если поменять местами пределы, то интеграл меняет знак.

2.14. Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболой  $y = x^2 - 2x + 3$  и прямой  $y = 2x$  (рис. 16)

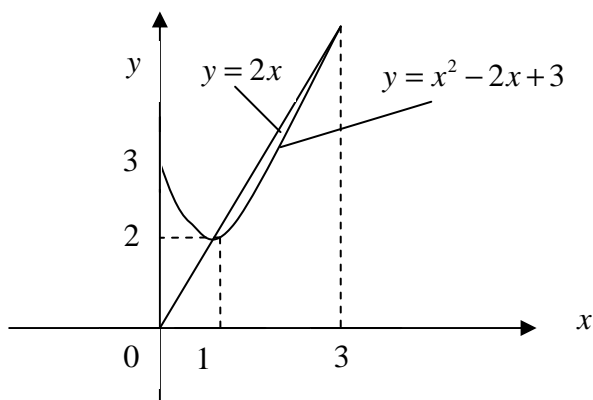


Рис. 16

Решение.

$$x^2 - 2x + 3 = 2x$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = 1; x_2 = 3$$

Площадь фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, расположенных на отрезке  $[1, 3]$  оси  $OX$  и ограниченных сверху одна – прямой  $y_1(x) = 2x$ , другая – параболой  $y_2(x) = x^2 - 2x + 3$

$$S = \int_1^3 y_1(x) dx - \int_1^3 y_2(x) dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \left( -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right) \Big|_1^3 = \frac{4}{3}$$

2.15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $y = (x-2)\ln x$  и осью абсцисс. (рис. 17)

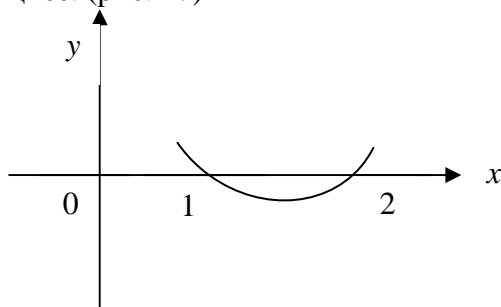


Рис. 17

Решение. Найдем точки пересечения кривой с осью  $OX$ :  $y = 0$ ;  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 2$ .

Фигура является криволинейной трапецией, расположенной под осью  $OX$ , следовательно

$$S = -\int_1^2 (x-2)\ln x dx$$

Для вычисления используем формулу интегрирования по частям:

$$\int_1^2 (x-2)\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; du = \frac{1}{x} dx \\ dV = (x-2)dx; V = \frac{1}{2}(x-2)^2 \end{array} \right| = \frac{(x-2)^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-2)^2}{x} dx = 0 - \int_1^2 \left( \frac{x}{2} - 2 + \frac{2}{x} \right) dx =$$

$$= \left( -\frac{x^2}{4} + 2x - 2 \ln|x| \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{4} - 2 \ln 2; \quad S = 2 \ln 2 - \frac{5}{4}$$

2.16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $y^2 = x^4(2-x)$

Решение: Кривая симметрична относительно оси  $OX$  и пересекает ее в точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ . Над осью  $OX$  расположена криволинейная трапеция, ограниченная кривой  $y = x^2\sqrt{2-x}$ .

$$S = 2 \int_0^2 x^2 \sqrt{2-x} dx =$$

Произведем замену переменных:  $(2-x) = t^2$ ;  $x = 2-t^2$ ;  $dx = -2tdt$ .

Найдем новые пределы интегрирования. При  $x = 0$ ,  $t = \sqrt{2}$ , при  $x = 2$ ,  $t = 0$  отсюда:

$$= 2 \int_{\sqrt{2}}^0 (2-t^2)^2 t (-2t) dt = -4 \int_{\sqrt{2}}^0 (4t^2 - 4t^4 + t^6) dt = 4 \left( \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{5} t^5 + \frac{1}{7} t^7 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{256\sqrt{2}}{105}.$$

## 2.2. Криволинейный интеграл первого рода (интеграл по длине дуги)

Вычисление криволинейного интеграла  $\int_{\Gamma} f(P) dL$  сводится к вычислению обычного определенного интеграла по промежутку:

1) если  $\Gamma$  - плоская кривая, заданная уравнением  $y = \varphi(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , то при вычислении криволинейного интеграла  $\int_{\Gamma} f(x, y) dL$  производим замену:

$$f(x, y) = f(x, \varphi(x)), \quad dL = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx \quad - \text{ дифференциал длины дуги плоской кривой.}$$

Получим:

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dL = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx \quad (2.7)$$

2) если  $\Gamma$  - пространственная кривая, заданная параметрически  $x = X(t)$ ,  $y = Y(t)$ ,

$$z = Z(t); \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad \text{то} \quad dL = \sqrt{(X'(t))^2 + (Y'(t))^2 + (Z'(t))^2} dt$$

откуда

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(X(t), Y(t), Z(t)) \sqrt{(X'(t))^2 + (Y'(t))^2 + (Z'(t))^2} dt \quad (2.8)$$

Если кривая плоская, то  $Z(t) = 0$ .

3) если кривая  $\Gamma$  задана в полярной системе координат, т.е.  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ , то

$$dL = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi, \quad \text{здесь} \quad x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi.$$

Тогда

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dL = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi \quad (2.9)$$

2.17. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} \left(x - \frac{y}{x}\right) dL$ , где линия  $\Gamma$  - часть параболы  $y = \frac{x^2}{2}$  от точки  $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$  до точки  $B(2, 2)$ .

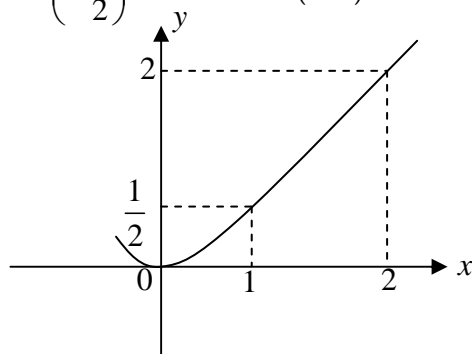


Рис. 18

Найдем интеграл по формуле (2.7).

Решение:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left(x - \frac{y}{x}\right) dL &= \int_1^2 \left[x - \frac{x^2}{2x}\right] \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{4} \int_1^2 (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

2.18. Вычислить  $\int_{\Gamma} y dL$ , где  $L$  - первая арка циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  (рис. 19).

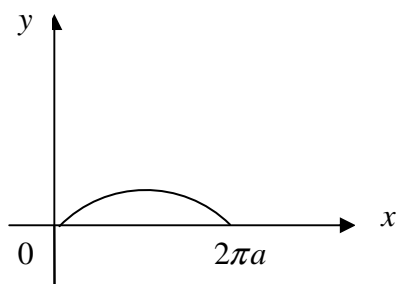


Рис. 19

Решение:

$$dL = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt;$$

$$x'(t) = a(1 - \cos t); \quad y'(t) = a \sin t.$$

$$dL = \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t} dt = a \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt.$$

так как при  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $\sin \frac{t}{2} \geq 0$ .

$$\int_{\Gamma} y dL = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t) 2 \sin \frac{t}{2} dt = 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt = 4a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt =$$



$$= -8a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = 8a^2 \left(-\cos \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{32}{3} a^2.$$

2.19. Вычислить  $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dL$ , где  $\Gamma$  - окружность  $r = 2 \cos \varphi$  (рис. 20)

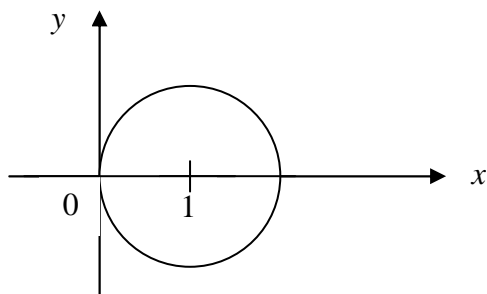


Рис. 20

Решение:

$$dL = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi = \sqrt{4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2 d\varphi; \quad \frac{-\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2 = 4 \cos^2 \varphi$$

$$\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dL = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 \varphi 2 d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 4 \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

2.20. Найти длину кардиоиды  $r = a(1 + \cos \varphi)$  (рис. 21)

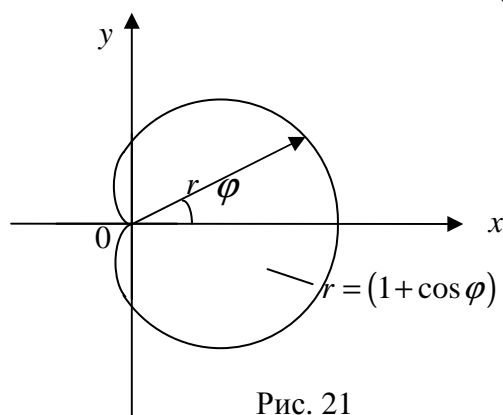


Рис. 21

Изменим полярный угол  $\varphi$  от 0 до  $\pi$  и получим половину искомой длины.

Решение:

$$S = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 (1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a$$

2.19. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = 4$ , отсеченной плоскостями  $z = 0$ , и  $z = 3 - x - y$  (рис. 20).

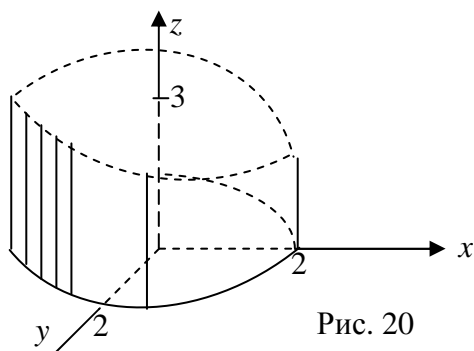
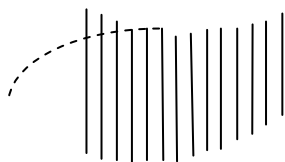


Рис. 20



Решение:

Перейдем к параметрической системе координат  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

$$dL = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt = 2 dt.$$

$$z = 3 - x - y = 3 - 2 \cos t - 2 \sin t.$$

$$S = \int_{\Gamma} z dL = \int_0^{2\pi} (3 - 2 \cos t - 2 \sin t) 2 dt = (6t - 4 \sin t + 4 \cos t) \Big|_0^{2\pi} = 12\pi.$$

### 2.3 Двойной интеграл в декартовой системе координат

Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат сводится к последовательному вычислению двух объемных определенных интегралов.

$$\iint_S f(x, y) dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (2.10)$$

Следует заметить, что элемент  $dS$  - есть сколь угодно малый элемент разбиения фигуры  $S$  на части (рис. 21);

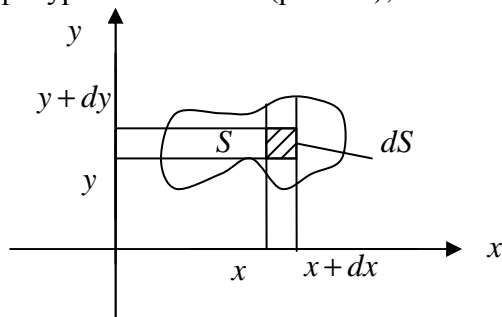


Рис. 21

$dS$  ограничен двумя парами бесконечно близких прямых:

$$x = \text{const}, \quad x + dx = \text{const},$$

$$y = \text{const}, \quad y + dy = \text{const},$$

поэтому его площадь определяется формулой  $dS = dx dy$ .

При этом считается, что область  $S$ , проекция которой на ось  $OX$  есть отрезок  $[a, b]$ , такова, что всякая прямая, параллельная оси  $OX$ , пересекает границу области не более чем в двух точках (рис. 22). Такая область называется правильной, т.е. каждая прямая  $x = \text{const}$  при  $a \leq x \leq b$  пересекает  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  в точке входа  $A$  и точке выхода  $B$ .

В формуле (2.10) интеграл  $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$  - называется внутренним интегралом, который вычисляется первым, в этом случае  $x = const$ , а затем вычисляется внешний интеграл  $\int_a^b dx$  от полученной функции от  $x$ .

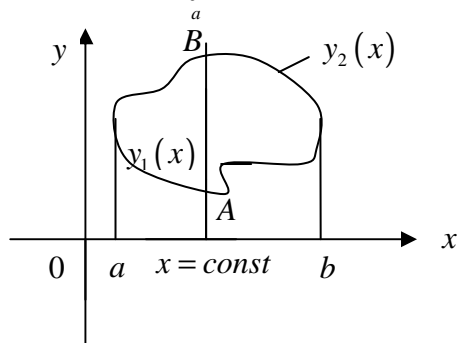


Рис. 22

Иногда удобно применить другой порядок интегрирования:

$$\iint_S f(x, y) dS = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad (2.11)$$

где  $[c, d]$  - проекция  $S$  на ось  $OY$ . Каждая прямая, проходящая через произвольную точку отрезка  $[c, d] \cap OX$ , пересекает границу области  $S$  не более чем в двух точках.

Области более сложной формы, чем рассмотрены на рис.21 и рис.22, нужно разбить на части, удовлетворяющие указанному выше требованию, затем вычислить интеграл для каждой части и воспользоваться свойством сложения интегралов.

2.20. Расставить пределы интегрирования для вычисления двойного интеграла  $\iint_S f(x, y) dx dy$  в области, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 4x - 3$ .

Построим область  $S$  и найдем ее проекцию на ось  $OX$  (т.е. найдем точки пересечения линий) (рис. 23).

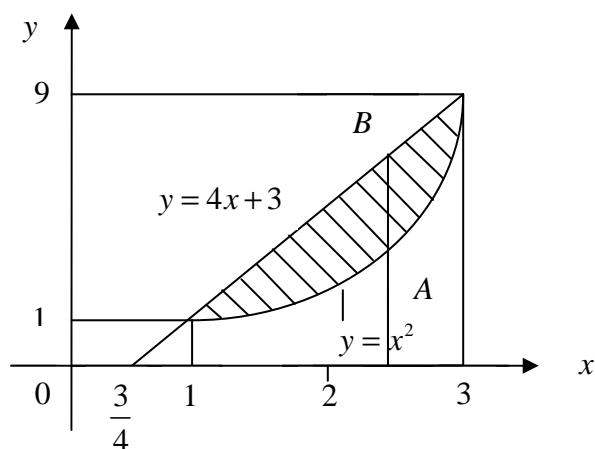


Рис. 23

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 4x - 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x_1 = 1, x_2 = 3 \\ y_1 = 1, y_2 = 9 \end{array}$$

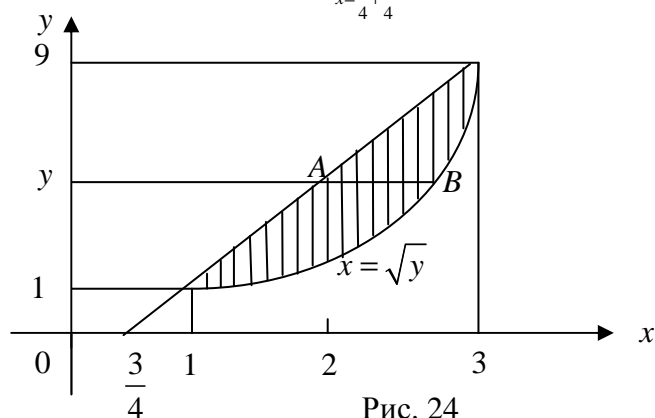
Возможны два варианта:

1) Рис. 23

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_1^3 dx \int_{y_1=x^2}^{y_2=4x-3} f(x, y) dy$$

2) Рис. 24

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_1^9 dy \int_{x=\frac{y}{4}+\frac{3}{4}}^{x=\sqrt{y}} f(x, y) dx$$



$$x = \frac{y}{4} + \frac{3}{4}$$

Рис. 24

2.21. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S (x - y) dx dy$  на области  $S$ , ограниченной линиями

$$y = 0; y = x; x + y = 2$$

Построим область  $S$  и определим координаты пересечения линий(рис. 25):

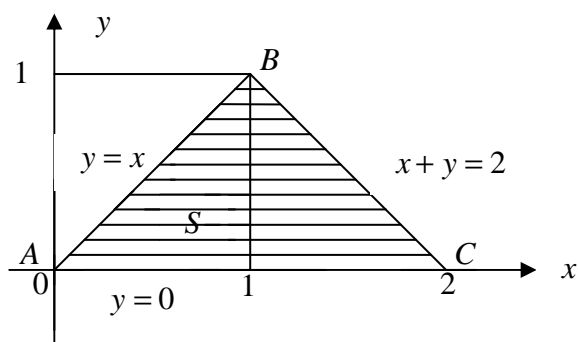


Рис. 25

Решение.

Определим координаты линий

$$\begin{cases} y = x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0; y = 0; A(0, 0)$$

$$\begin{cases} y = x \\ x + y = 2 \end{cases} \rightarrow x = 1, y = 1; B(1, 1)$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow x=2, y=0; C(2,0)$$

Используя формулу (2.11), получим:

$$\begin{aligned} \iint_S (x-y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{x=y}^{x=2-y} (x-y) dx = \int_0^1 dy \left( \frac{x^2}{2} - yx \right) \bigg|_{x=y}^{x=2-y} = \int_0^1 \left[ \frac{(2-y)^2}{2} - y(2-y) - \frac{y^2}{2} + y^2 \right] dy = \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{4-2y+y^2}{2} - 2y + y^2 - \frac{y^2}{2} + y^2 \right] dy = \int_0^1 (2-4y+2y^2) dy = 2 \left( y - y^2 + \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2.22. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  $x = 4y - y^2$ ,  $x + y = 6$  (рис. 26).

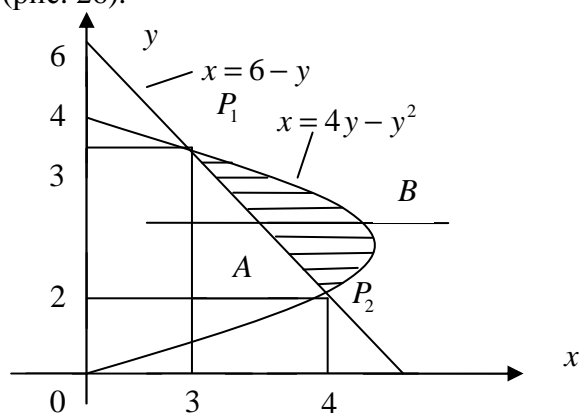


Рис. 26

Решение:

Найдем координаты точек пересечения заданных линий:

$$6 - y = 4y - y^2$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$y_1 = 3; x_1 = 3$$

$$y_2 = 2; x_2 = 4$$

$$P_1(3, 3), P_2(4, 2)$$

т. А - точка входа, т. В - точка выхода из области S.

$$S = \int_2^3 dy \int_{x=6-y}^{x=4y-y^2} dx = \int_2^3 (4y - y^2 - 6 + y) dy = \int_2^3 (-y^2 + 5y - 6) dy = \left( -\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y \right) \bigg|_{-6}^2 = \frac{1}{6}.$$

2.23. Вычислить площадь, ограниченную линиями  $y = 2 - x$ ;  $y^2 = 4x + 4$  (рис. 27).

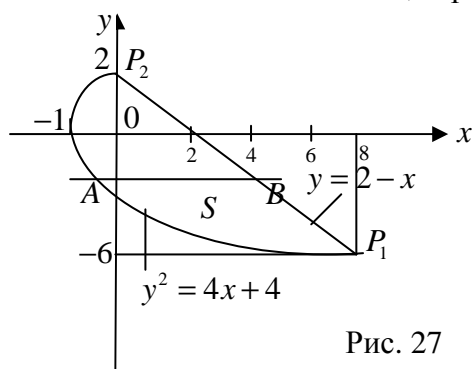


Рис. 27

Решение:

Координаты точек пересечения линий

$$y^2 = 8 - 4y + 4$$

$$y^2 + 4y - 12 = 0$$

$$y_1 = 2; x_1 = 0; P_1(0, 2)$$

$$y_2 = -6; x_2 = 8; P_2(8, -6)$$

$$S = \int_{-6}^2 dy \int_{x=\frac{1}{4}y^2-1}^{x=2-y} dx = \int \left( 2 - y - \frac{1}{4}y^2 + 1 \right) dy = \left( 3y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}y^3 \right) \Big|_{-6}^2 = \frac{64}{3}.$$

2.24. Вычислить площадь, ограниченную линиями  $y^2 = 4(1-x)$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  (вне параболы) (рис. 28).

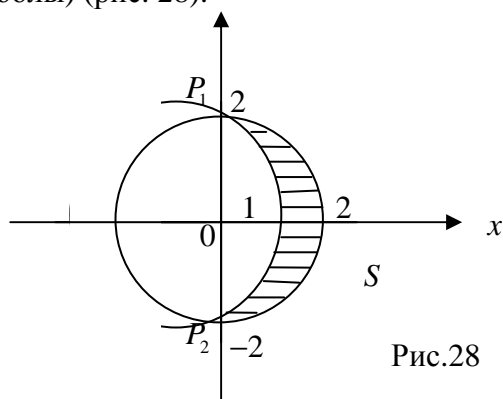


Рис.28

Решение:

Координаты точек пересечения линий

$$4 - x^2 = 4(1 - x);$$

$$x^2 - 4x = 0;$$

$$x(x - 4) = 0;$$

$$x_1 = 0; y_{1,2} = \pm 2;$$

$$P_1(0, -2); P_2(0, 2)$$

$$x_2 = 4; y = \sqrt{-12} \text{ не существует}$$

т. А - вход, т. В - выход из области S.

$$S = \int_{-2}^2 dy \int_{x=1-\frac{1}{4}y^2}^{x=\sqrt{4-y^2}} dx = \int_{-2}^2 \left[ \sqrt{4-y^2} - \left( 1 - \frac{1}{4}y^2 \right) \right] dy = \int_{-2}^2 \sqrt{4-y^2} dy - \int_{-2}^2 \left( 1 - \frac{1}{4}y^2 \right) dy.$$

Вычислим отдельно первый интеграл

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-y^2} dy =$$

$$y = 2 \sin t; dy = 2 \cos t dt; t = \arcsin \frac{y}{2}$$

при изменении  $-2 \leq x \leq 2; -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4 \sin 2t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

Тогда площадь  $S$  можно выразить, как

$$S = 2\pi - \int_{-2}^2 \left( 1 - \frac{1}{4} y^2 \right) dy = 2\pi - \left( y - \frac{1}{12} y^3 \right) \Big|_{-2}^2 = 2\pi - \frac{8}{3}.$$

## 2.4. Двойной интеграл в полярной системе координат

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах осуществляется по формуле

$$\iint_S f(x, y) dS = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r=r_1(\varphi)}^{r=r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \quad (2.12)$$

В подынтегральном выражении  $f(x, y) dS$  осуществляется переход к полярным координатам по формулам:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad dS = r dr d\varphi.$$

При этом предполагается, что всякий луч, выходящий из начала координат, пересекает границу области  $S$  не более чем в двух точках, уравнение линии входа  $r = r_1(\varphi)$ , уравнение линии выхода  $r = r_2(\varphi)$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  - пределы изменения угла  $\varphi$  в области  $S$  (рис. 29).

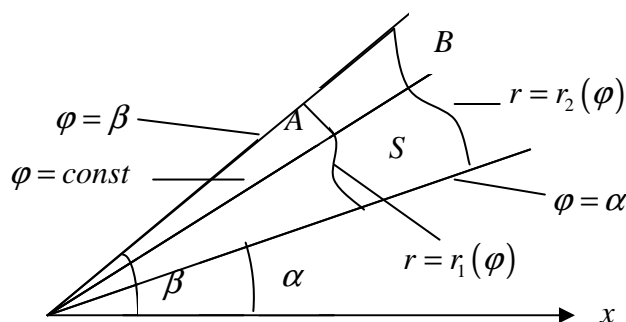


Рис. 29

В отличие от декартовых координат, в полярных координатах порядок интегрирования всегда одинаков. Внутреннее интегрирование ведут по переменной  $r$  от точки входа  $A$  до точки выхода  $B$  при произвольном, но фиксированном значении  $\varphi = \text{const}$  в интервале  $[\alpha, \beta]$ . Внешнее интегрирование ведут по переменной  $\varphi$  в пределах ее изменения  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ .

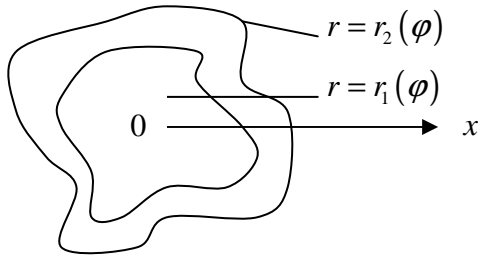


Рис. 30

Если область  $S$  кольцевая и ограничена замкнутыми линиями  $r = r_1(\varphi)$  и  $r = r_2(\varphi)$ , а полюс получим внутри кольца (рис. 30) и в формуле (2.12) следует положить  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2\pi$ .

2.25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = e^2$  (рис. 31).

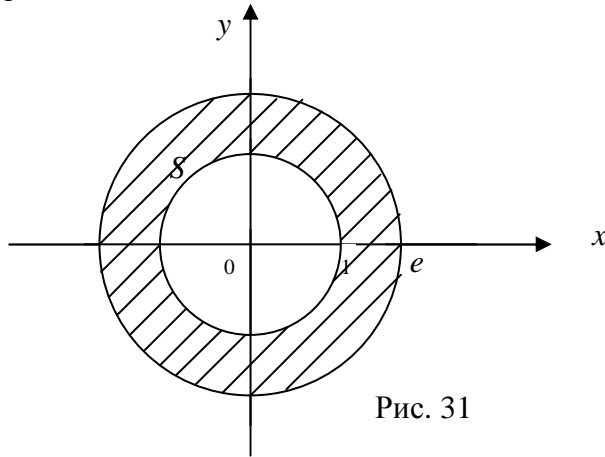


Рис. 31

Область  $S$  представляет собой кольцо, заключенное между окружностями. Перейдем к полярным координатам уравнения грани области

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 1 \rightarrow r = 1 - \text{линия входа}$$

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = e^2 \rightarrow r = e - \text{линия выхода}$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r=1}^{r=e} r dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e^2 - 1) d\varphi = \frac{1}{2} (e^2 - 1) \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi (e^2 - 1)$$

Рассмотрим решение интеграла

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy &= \left| \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{\ln[r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)]}{r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \frac{\ln r^2}{r^2} = 2 \frac{\ln r}{r^2} \right| = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r=1}^{r=e} \frac{\ln r}{r} dr = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left. \frac{\ln^2 r}{2} \right|_1^e = \int_0^{2\pi} (\ln^2 e - \ln^2 1) d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

2.26 Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями  $r = 1, r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$  (вне окружности  $r = 1$ ) (рис. 32).



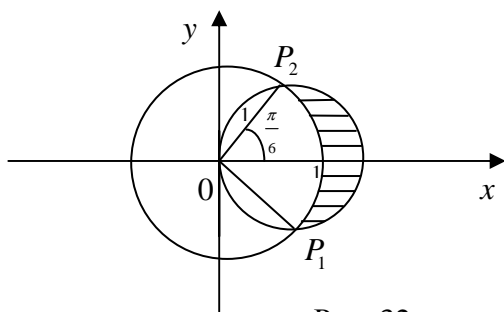


Рис. 32

Решение:

Найдем координаты т.  $P_2$ , получим  $1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$ ;  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ .

$$P_2\left(1, \frac{\pi}{6}\right), P_1\left(1, -\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_S r dr d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi} r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{4}{3} \cos^2 \varphi - 1 \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) - 1 \right] d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos 2\varphi - 1) d\varphi = \frac{1}{3} [\sin 2\varphi - \varphi]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} \left( \sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{18} (3\sqrt{3} - \pi). \end{aligned}$$

2.27 Найти площадь фигуры ограниченной линией  $x^3 + y^3 = axy$  (площадь петли) (рис. 33).

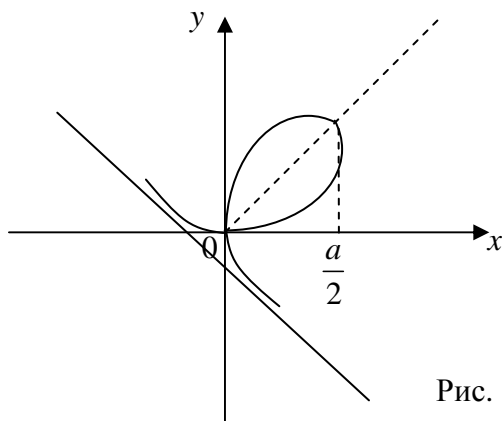


Рис. 33

Решение:

Преобразуем данное уравнение в полярных координатах

$$r^3 (\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi) = ar^2 \sin \varphi \cos \varphi; \text{ т.е. } r = \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$$

Осью симметрии является луч  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , поэтому:

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \iint_S r dr d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}} r dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2 \varphi \cdot \cos^4 \varphi}{\cos^6 \varphi (1 + tg^3 \varphi)^2} d\varphi = \\
 &= \frac{a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3tg^2 \varphi}{\cos^2 \varphi (1 + tg^3 \varphi)^2} d\varphi = \frac{a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1 + tg^3 \varphi)}{(1 + tg^3 \varphi)^2} = \left[ -\frac{a^2}{3(1 + tg^3 \varphi)} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{6}.
 \end{aligned}$$

2.28 Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  (рис. 34).

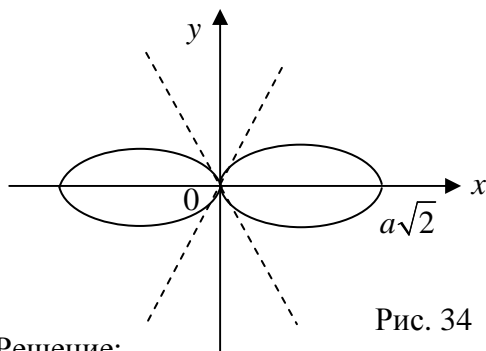


Рис. 34

Решение:

Перейдем к полярным координатам:  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

$$r^4 = 2a^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

$$r = a\sqrt{2 \cos 2\varphi}$$

Для части фигуры, расположенной в первой четверти, угол  $\varphi$  изменяется в пределах

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \iint_S r dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2 \cos 2\varphi}} r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi r^2 \Big|_0^{a\sqrt{2 \cos 2\varphi}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.
 \end{aligned}$$

## 2.5 Интеграл по поверхности (первого рода)

Вычисление интеграла по поверхности  $Q$ , заданной уравнениями  $Z = Z(x, y)$ , сводится к вычислению двойного интеграла по плоской области  $S$ , которая является проекцией поверхности  $Q$  на плоскость  $XOY$ .

$$\iint_Q f(x, y, z) dq = \iint_S f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (Z'_x)^2 + (Z'_y)^2} dS \quad (2.13)$$

$$\text{Здесь } dq = \sqrt{1 + (Z'_x)^2 + (Z'_y)^2} dS$$

Если уравнение поверхности дано в виде  $X = X(y, z)$ , то используется формула

$$\iint_Q f(x, y, z) dq = \iint_{\partial Q \cap YOZ} f(X(y, z), y, z) \sqrt{1 + (X'_y)^2 + (X'_z)^2} dS \quad (2.14)$$

Здесь  $dq = \sqrt{1 + \left(X'_y\right)^2 + \left(X'_z\right)^2} dq$

Если уравнение поверхности дано в виде  $Y = Y(x, z)$ , то используется формула

$$\iint_Q f(x, y, z) dq = \iint_{i \partial Q \cap YOZ} f(x, y(x, y), z) \sqrt{1 + \left(Y'_x\right)^2 + \left(Y'_z\right)^2} dS, \quad (2.15)$$

здесь  $dq = \sqrt{1 + \left(Y'_x\right)^2 + \left(Y'_z\right)^2} dS$

2.29 Вычислить поверхность  $Q$  сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  (рис. 35)

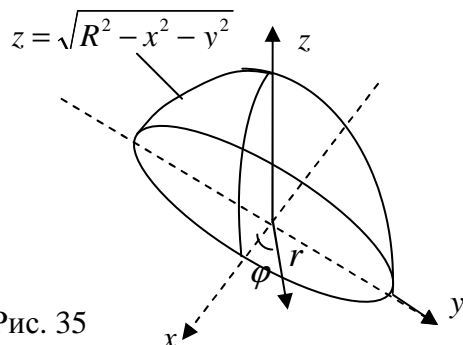


Рис. 35

Вычислить поверхность верхней половины сферы  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ .

В этом случае

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

Используя формулу (2.13)

$$dq = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

Область интегрирования (проекция  $Q$  на  $XOY$ )

$$x^2 + y^2 \leq R^2.$$

Тогда  $\frac{1}{2} S = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dy$

Перейдем к полярной системе координат:  $r = R$

$$S = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = 2R \int_0^{2\pi} \left[ -\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R d\varphi = 2R \int_0^{2\pi} R d\varphi = 4\pi R^2$$

2.30. Вычислить площадь части поверхности  $z = 1 - x^2$  (в пространстве параболы, в плоскости  $XOZ$  - парабола), отсеченной плоскостями  $y = x$  и  $y = 2x$

( $x \geq 0$ ) (рис.36)

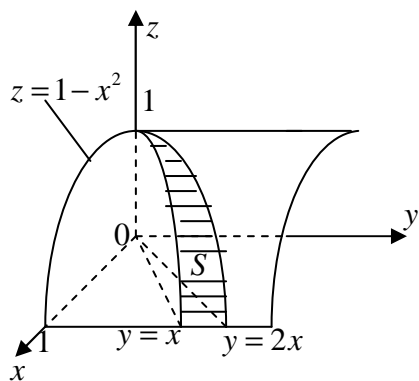


Рис. 36

Решение.

В рассматриваемой задаче:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = -2x; \quad z'_y = 0$$

$$dq = \sqrt{1 + 4x^2} dx dy$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_S \sqrt{1 + 4x^2} dS = \int_a^1 dx \int_x^{2x} \sqrt{1 + 4x^2} dy = \int_0^1 dx \sqrt{1 + 4x^2} y \Big|_x^{2x} = \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \\ &= \frac{1}{8} (1 + 4x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (1 + 4x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

2.31. Вычислить интеграл  $\iint_Q x dq$ , где Q – часть сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , лежащая в первом октанте (рис.37).

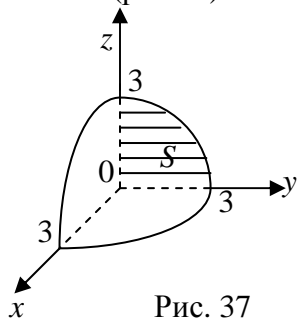


Рис. 37

Решение:

Запишем уравнение поверхности Q в виде, разрешенном относительно x;

$$x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}$$

$$dq = \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz$$

$$x'_y = \frac{-y}{\sqrt{9 - y^2 - z^2}}; \quad x'_z = \frac{-z}{\sqrt{9 - y^2 - z^2}};$$

$$dq = \frac{3 dy dz}{\sqrt{9 - y^2 - z^2}}$$

Проекция поверхности  $Q$  на плоскость  $YOZ$  (область  $S$ ) - четверть круга  $y^2 + z^2 \leq 9$   
Поэтому

$$\iint_Q x dq = \iint_S \sqrt{9 - y^2 - z^2} \frac{3dS}{\sqrt{9 - y^2 - z^2}} = 3 \iint_S dS = \frac{27}{4} \pi$$

2.32. Вычислить поверхностный интеграл  $\iint_Q z dq$ , если  $Q$ - часть поверхности  $z = xy$ , отсеченной плоскостями  $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$ . (рис.38)

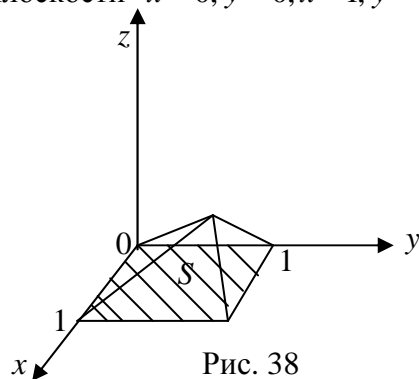


Рис. 38

Решение

$$f(x, y, z) = z$$

$$dq = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS$$

$S$  – квадрат

$$\begin{aligned} Q &= \iint_Q z dq = \iint_Q xy \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS = \int_0^1 x dx \int_0^1 y \sqrt{1 + x^2 + y^2} dy = \int_0^1 x dx \left. \frac{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x \left[ (2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} \right] dx = \frac{1}{15} \left[ (2 + x^2)^{\frac{5}{2}} - (1 + x^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{15} (9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

2.33. Найти площадь части конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , заключенной внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = 2x$  (рис. 39)

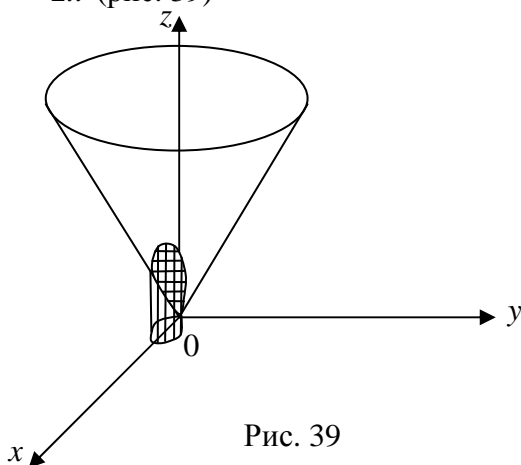


Рис. 39

Решение:

Из уравнения конуса имеем:

$$dq = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dS$$

Областью интегрирования  $S$  является круг, лежащий в плоскости  $XOY$  ограниченный окружностью  $x^2 + y^2 = 2x$  или в некоторой системе координат  $r = 2\cos\varphi$ . Тогда

$$\begin{aligned} S &= \iint_S \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = \sqrt{2} \iint_S dxdy = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r dr = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r dt = \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\varphi d\varphi = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 2\sqrt{2} \left[ \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

## 2. Тройной интеграл

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению определенного интеграла по отрезку и двойного интеграла по плоской области.

Пусть плоская область  $S$  - проекция тела  $R$  на плоскость  $XOY$ , причем каждая прямая, параллельная от  $OZ$ , пересекает границу тела  $R$  не более чем в двух точках (точка входа и точка выхода). Если тела таковы, что это условие не выполняется, то тело  $R$  следует разделить на конечное число тел, для которых пересечение его прямой в двух точках выполнимо, решить задачи для каждого из вновь полученных тел и результаты сложить (используя свойство определенного интеграла)

Пусть  $z = z_1(x, y)$  - уравнение поверхности входа и  $z = z_2(x, y)$  - уравнение поверхности выхода, тогда

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iint_S dS \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (2.16)$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл по  $z$  при постоянных  $x$  и  $y$ , от полученного результата, затем находим двойной интеграл по области  $S$ .

2.3.4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями (рис. 40)

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x + z = 2$$

$$2x + z = 4$$

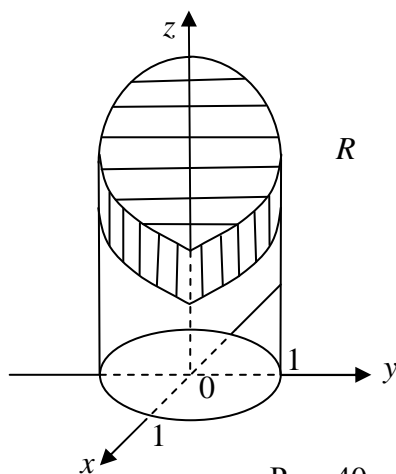


Рис. 40

Решение:

Область  $S$  (проекция  $R$  на плоскость  $XOY$ ) - круг  $x^2 + y^2 \leq 1$

Поверхность входа  $z = 2 - x$

Поверхность выхода  $z = 4 - 2x$

Следовательно, по (2.16)

$$V = \iiint_R dV = \iint_S dS \int_{2-x}^{4-2x} dz = \iint_S dS z \Big|_{2-x}^{4-2x} = \iint_S (2-x) dS =$$

перейдем к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,

$$y = r \sin \varphi,$$

$$r = 1.$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2 - r \cos \varphi) r dr = \int_0^{2\pi} \left( r^2 - \frac{r^3}{3} \cos \varphi \right) \Big|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} \cos \varphi \right) d\varphi = \left( \varphi - \frac{1}{3} \sin \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

2.3.5. Вычислить объем эллипсоида (рис. 41)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

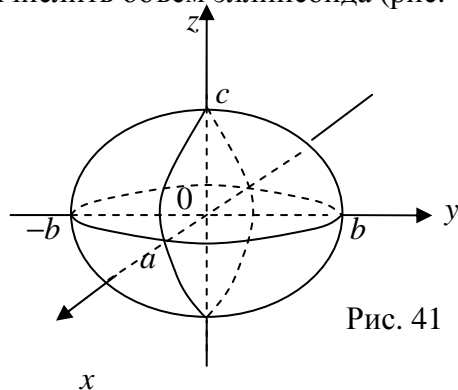


Рис. 41

Решение:

Эллипсоид ограничен снизу поверхностью  $z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$  сверху поверхностью

$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ . Проекцией эллипсоида на плоскость  $XOY$  (область  $S$ ) является эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тогда:

$$V = \iint_S ds \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz = 2c \iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} ds = 2c \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy =$$

Так как при вычислении внутреннего интеграла  $x$  считается постоянной, то можно сделать следующую замену

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin t; \quad dy = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cos t dt$$

Переменная  $y$  изменяется от  $-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  до  $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ , поэтому  $t$  меняется от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$

$$(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \sin t = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}; \sin t = 1; t = \frac{\pi}{2})$$

Подставим в интеграл новые пределы и значения переменных, получим:

$$\begin{aligned} V &= 2c \int_{-a}^a \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) - \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \sin^2 t} \cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \cos t dt \right] dx = 2cb \int_{-a}^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{cb}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{cb\pi}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{cb\pi}{a^2} \left( a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-a}^a = \frac{4abc\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{4abc\pi}{3}$$

Если  $a = b = c$ , то получим объем шара  $V = \frac{4}{3} \pi a^3$

2.3.6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  и конусом  $z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0)$  (рис.42)

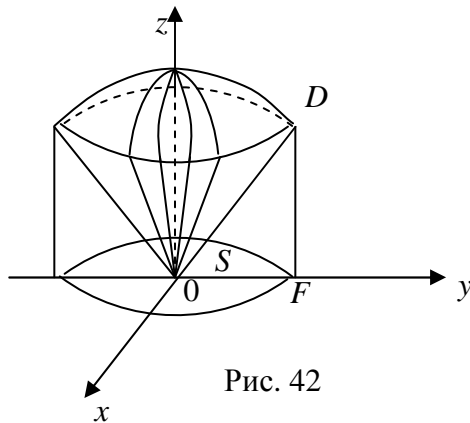


Рис. 42

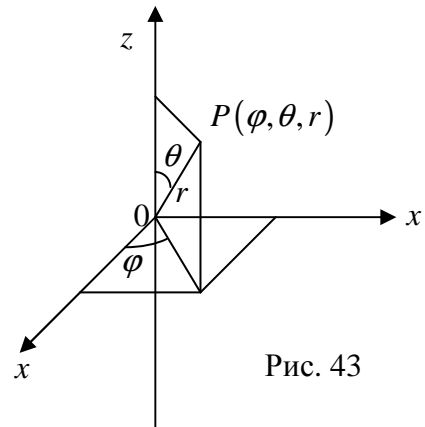


Рис. 43

Решение:

Для решения задачи перейдем к сферической системе координат (рис.43)

$$x = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

Тогда для нашей задачи имеем:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R dv = \iiint_R r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \left( \frac{1}{3} r^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) d\varphi = \frac{2\pi}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Допустим, что  $0 \leq r \leq 1$ , т.к. точка  $P$  на рис.43 является точкой сферы, а ее радиус



равен 1.

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  т.к.  $S$  есть проекция на  $XOY$  круга радиуса  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , этот круг - есть линия пересечения сферы и конуса т.е.

$x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  есть круг с радиусом  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , треугольник  $OFD$  - равнобедренный т.к.  $OD^2 = OF^2 + FD^2$ , следовательно  $\angle DOF = \frac{\pi}{4}$ , а значит углы между прямой  $OD$  и осью  $OZ = \frac{\pi}{4}$

2.3.7. Вычислить интеграл  $\iiint_R (x^2 + y^2) dV$ , где область  $R$  ограничена поверхностями

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad z = 3(x^2 + y^2)$$

Поверхность  $z = 3(x^2 + y^2)$  и  $z = 4 - x^2 - y^2$  представляют собой параболоиды вращения с осью симметрии  $OZ$  и вершинами соответственно в начале координат и в точке  $(0, 0, 4)$  (рис.44).

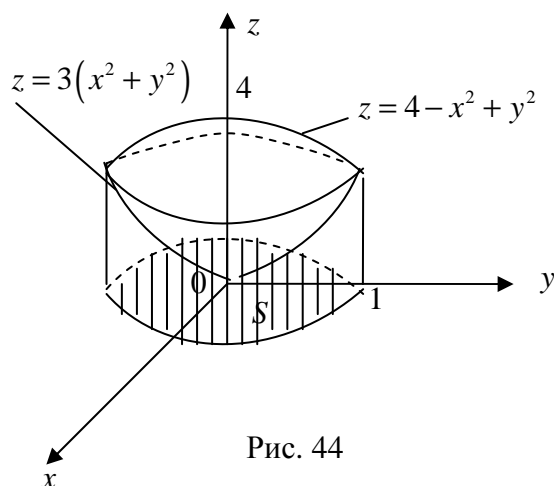


Рис. 44

Найдем линию пересечения этих поверхностей

$$\begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) \\ z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

Имеем

$$3(x^2 + y^2) = 4 - (x^2 + y^2)$$

Откуда

$$x^2 + y^2 = 1$$

Проекция области, заключенной между параболоидами, на плоскость  $XOY$  представляет собой круг  $x^2 + y^2 = 1 - S$

$$\begin{aligned}\iint_R (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iint_S (x^2 + y^2) dx dy \int_{z=3(x^2+y^2)}^{z=4-(x^2+y^2)} dz = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy \cdot z \Big|_{z=3(x^2+y^2)}^{z=4-(x^2+y^2)} = \\ &= 4 \iint_S (x^2 + y^2) [1 - (x^2 + y^2)] dx dy =\end{aligned}$$

перейдем к полярной системе координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

$$r = 1 (x^2 + y^2 = 1)$$

$$= 4 \int_S \int_S r^2 (1 - r^2) r dr d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3 - r^5) dr = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{6} r^6 \right) \Big|_0^1 = 4 \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

### 3. Приложение определенного интеграла в геометрии

#### 3.1. Площадь плоской фигуры

3.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $y = (x^2 + 4x)e^{-2x}$  и осью  $OX$

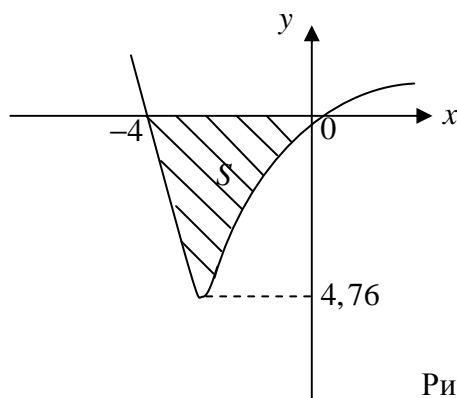


Рис. 3.1

Решение

$$S = - \int_{-4}^0 (x^2 + 4x) e^{-2x} dx =$$

[Интегрируем по частям

$$u = x^2 + 4x, \quad du = (2x + 4) dx$$

$$dV = -e^{-2x} dx : V = \frac{1}{2} e^{-2x}]$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 4x) e^{-2x} \Big|_{-4}^0 - \int_{-4}^0 (x + 2) e^{-2x} dx =$$

$$[\text{еще раз } u = x + z, \quad du = dx, \quad dV = -e^{-2x} dx : V = \frac{1}{2} e^{-2x}]$$

$$= \frac{1}{2} (x + z) e^{-2x} \Big|_{-4}^0 - \frac{1}{2} \int_{-4}^0 e^{-2x} dx = \frac{1}{4} (5 + 3e^8)$$

3.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой  $x = 2 \cos^3 t, \quad y = 2 \sin^3 t$  (рис. 3.2)

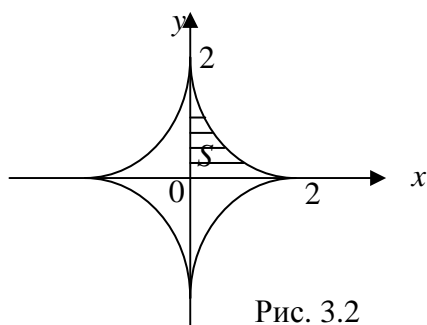


Рис. 3.2

Решение:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2 \sin^3 t (-6 \cos^2 t \sin t) dt = 48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt = 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t (1 + \cos 2t) dt = \\
 &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt + 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2t \cos 2t dt = \left( 3t - \frac{3}{4} \sin 4t + \sin^3 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \pi
 \end{aligned}$$

3.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $(x^2 + y^2)^2 = 18xy$  (рис. 3.4)

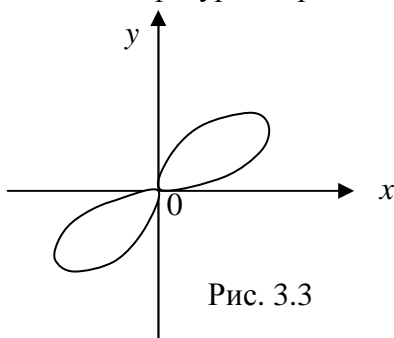


Рис. 3.3

Решение:

Перейдем к полярным координатам

$$r^4 = 18r^2 \cos \varphi \sin \varphi$$

$$r = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$$

$$S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr = \int_0^{\frac{2\pi}{2}} d\varphi r^2 \Big|_0^{3\sqrt{\sin 2\varphi}} = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{9}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 9$$

3.4. Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - t \quad (\text{рис.3.4.}) \quad (\text{петля})$$

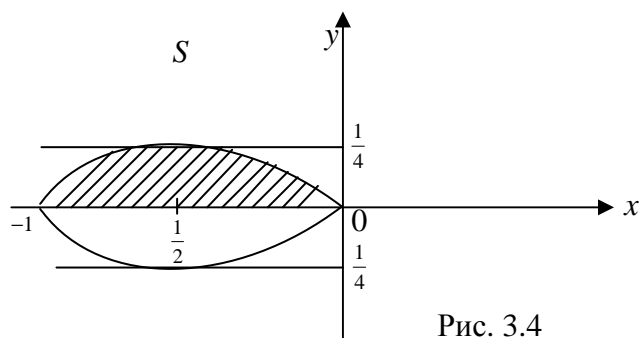


Рис. 3.4

Решение:

Ось  $OX$  - ось симметрии

$$0 \leq z \leq 1.$$

$$S = -2 \int_0^1 (t^3 - t) 2t dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt = -4 \left( \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

3.5. Вычислить площадь заключенную между кривыми

$$y = 2 - x^2; y^3 = x^2 \text{ (рис 3.5.)}$$

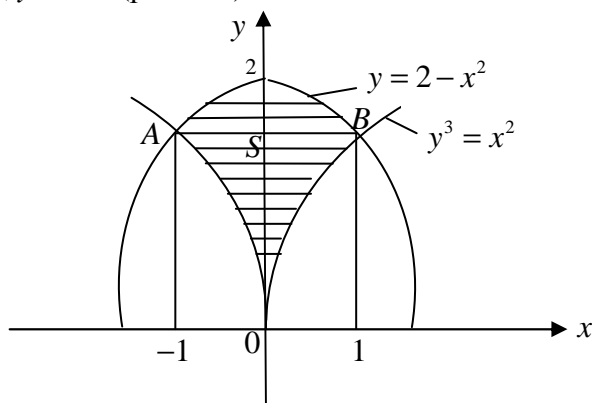


Рис. 3.5.

Решение

Решая систему  $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y^3 = x^2 \end{cases}$  находим пределы интегрирования по координате  $x$ :

$$x_1 = -1, x_2 = 1$$

$$S = \int_{-1}^1 dx \int_{y=x^{2/3}}^{y=2-x^2} dy = \int_{-1}^1 dx (2 - x^2 - x^{2/3}) = \left( 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{5/3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \frac{2}{15}$$

### 3.2. Площадь поверхности

3.6. Найти площадь части поверхности конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , вырезанную плоскостями  $y = x$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$  (рис. 3.6.)

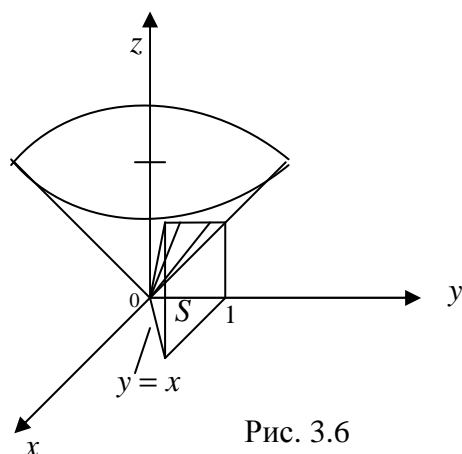


Рис. 3.6

Решение

$$S = \iint_Q dq = \iint_S \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} ds$$

$$\frac{dz}{dx} = Z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; Z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$dq = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} ds = \sqrt{2} ds = \iint_S \sqrt{2} ds = \sqrt{2} \int_0^1 dx \int_0^{y=x} dy = \sqrt{2} \int_0^1 x dx = \sqrt{2} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.7. Вычислить площадь полной поверхности тела, ограниченного параболой  $z = 2 - x^2 - y^2$  и  $z = x^2 + y^2$  (рис. 3.7.)

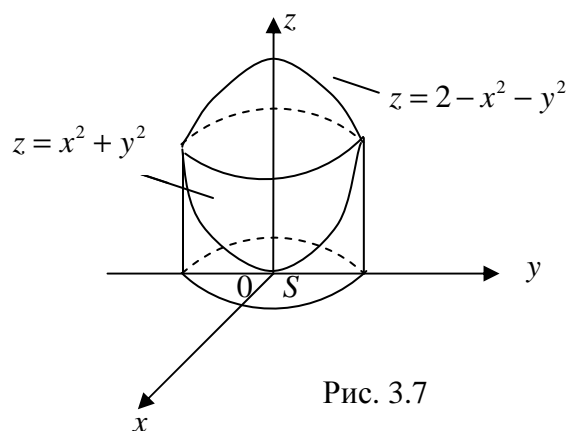


Рис. 3.7

Решение

$$S = 2 \iint_Q dq$$

$$z = x^2 + y^2; \quad z'_x = 2x; \quad z'_y = 2y$$

$$dq = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dS$$

аналогично

$$z = 2 - x^2 - y^2; \quad z'_x = -2x;$$

$$z'_y = -2y; \quad dq = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dS$$

проекция на плоскость  $XOY$  -  $S$  - есть круг  $x^2 + y^2 = 1$

$$S = 2 \iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dS \quad \left| \begin{array}{l} \text{перейдем} \\ \text{к} \\ \text{полярным} \\ \text{координатам} \end{array} \right| 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2 \int_0^{2\pi} \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4r^2) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1)$$

3.8. Вычислить площадь параболы  $x^2 + z^2 + y = 8$ , отсеченной плоскостью  $y = 4$  (рис. 3.8.)

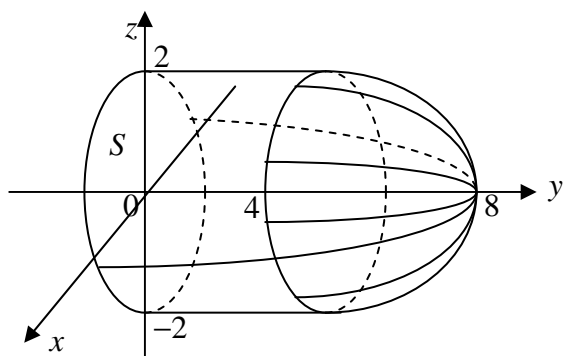


Рис. 3.8

Решение:

Уравнение поверхности запишем в виде  $y = 8 - x^2 - z^2$

Проекция поверхности на плоскость  $XOZ$  ( $S$ ) - круг  $x^2 + z^2 \leq 4$

$$y'_x = -2x; \quad y'_z = -2z$$

$$S = \iint_S \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} ds = \iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz =$$

перейдем к полярной системе координат  $x = r \cos \varphi$ ;  $z = r \sin \varphi$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{\pi}{5} (17\sqrt{17} - 1)$$

### 3.2.1. Площади цилиндрической поверхности

3.9. Найти площадь части цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = 1$ , заключенной между плоскостью  $z = 0$  и поверхностью  $z = 4 - x^2$  (рис 3.9.)

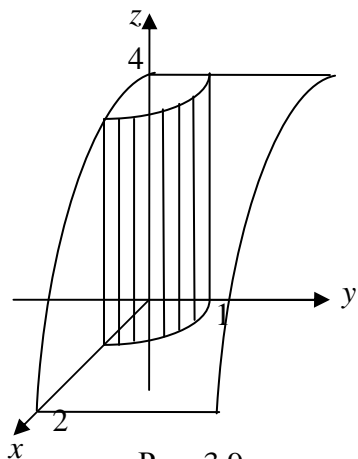


Рис. 3.9

Решение:

$$S = \int_L z dL = \int_L (4 - x^2) dL$$

Уравнение окружности  $L$  ( $x^2 + y^2 = 1$ ) запишем в параметрическом виде

$$x = \cos t, y = \sin t$$

$$dL = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = dt$$

$$S = \int_0^{2\pi} (4 - \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} \left( 4 - \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \left( 3,5t - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 7\pi$$

3.10. Вычислить площадь части параболического цилиндра  $y = \sqrt{2x}$ , ограниченного плоскостями  $z = y$ ;  $x = 2$ ;  $z = 0$  (рис.3.10)

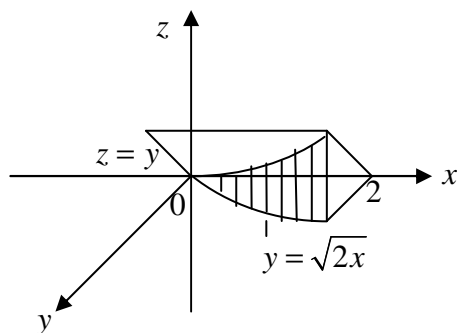


Рис. 3.10

Решение:

$$x = \frac{1}{2} y^2; dL = \sqrt{1 + y^2} dy$$

$$S = \int_L z dL = \int_0^2 y \sqrt{1 + y^2} dy = \frac{1}{3} (1 + y^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1)$$

3.11. Найти площадь той части поверхности цилиндра  $x^2 + y^2 = a^2$ , которая вырезается цилиндром  $x^2 + z^2 = a^2$  (рис. 3.11)

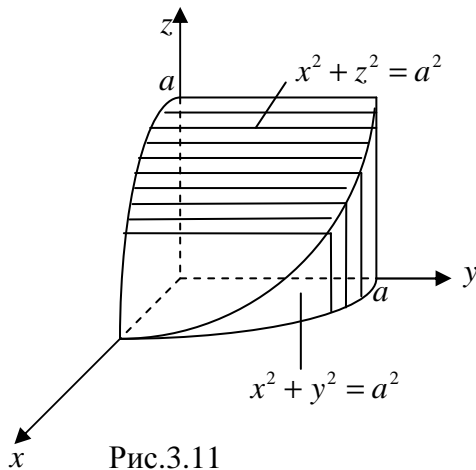


Рис.3.11

Решение:

На рис. 3.11 изображена  $\frac{1}{8}$  часть поверхности. Уравнение поверхности имеет вид

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ , поэтому

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \frac{dy}{dz} = 0$$

$$dq = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Область интегрирования представляет собой четверть круга, т.е. определяется условиями  $x^2 + z^2 \leq a^2; x \geq 0; z \geq 0$ , тогда

$$\frac{1}{8}Q = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz = a \int_0^a \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \int_0^a dx = a^2$$

### 3.2.2. Площадь поверхности вращения

Если поверхность образована вращением линии  $y = y(x), x \in [a, b]$  вокруг оси  $Ox$  (рис 3.12), то ее площадь  $Q$  вычисляется по следующей формуле:

$$Q = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \quad (3.1)$$

При вращении линии  $x = x(y), y \in [c, d]$  вокруг оси  $Oy$  (рис. 3.13.) формула определения площади вращения имеет вид:

$$Q = 2\pi \int_c^d x(y) \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy \quad (3.2.)$$

Если линия задана параметрически уравнением  $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ , то площадь поверхности, образованной вращением ее относительно оси  $ox$ , определяется формулой:

$$Q = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad (3.3)$$

а если вокруг оси  $Oy$ , то



$$Q = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad (3.4.)$$

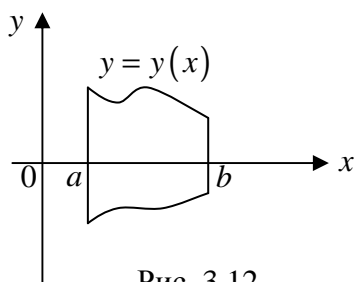


Рис. 3.12

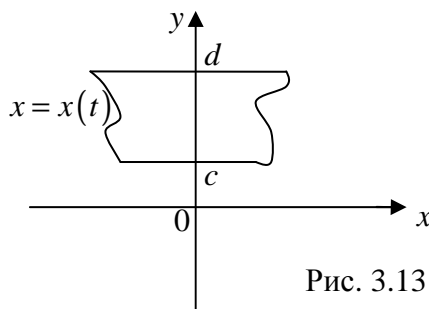


Рис. 3.13

3.12. Найти площадь поверхности, образованную вращением кривой  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  вокруг оси  $OX$ . (рис. 3.14)

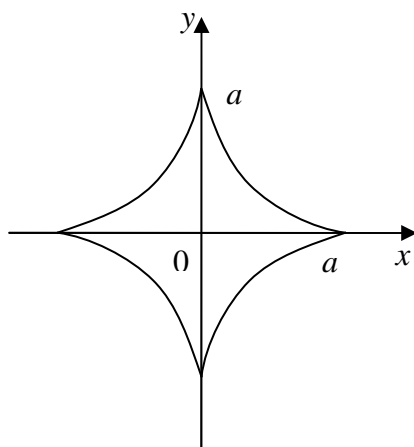


Рис. 3.14

Учитывая симметрию кривой (астроида) относительно осей координат, достаточно найти поверхность, образованную ветвью астроида в первом координатном угле  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , а полученный результат удвоить.

Решение:

Для решения воспользуемся формулой (3.3)

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \\ x'_t &= -3a \cos^2 t \sin t; \quad y'_t = 3 \sin^2 t \cos t \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^4 t \cos t dt = \\ &= 12a^2 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\sin t) = \frac{12}{5} \pi a^2 \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12a^2 \pi}{5}. \end{aligned}$$

3.13 Найти площадь поверхности, образованной вращениями линии  $x = y^3$  вокруг оси  $OY$ ,  $y = 0, y = 1$ . (рис. 3.15)

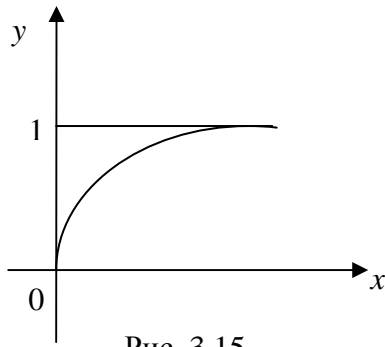


Рис. 3.15

Решение:

Используем (3.2)

$$Q = 2\pi \int_0^1 x(y) \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy = 2\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1 + 9y^4} dy = \frac{\pi}{18} \int_0^1 (1 + 9y^4)^{1/2} d(1 + 9y^4) =$$

$$= \frac{\pi}{18} \cdot \frac{2}{3} (1 + 9y^4)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

3.14 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $OX$  петли кривой  $9y^2 = x(3 - x^2)$ . (рис. 3.16)

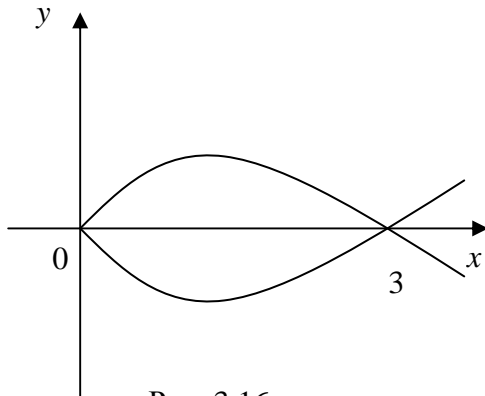


Рис. 3.16

Решение:

Для верхней части кривой при  $0 \leq x \leq 3$  имеем:  $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ .

$$\text{Отсюда } dL = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{x+1}{2\sqrt{x}} dx.$$

Используя формулу (3.1), получим

$$S = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x} \cdot \frac{(x+1)}{2\sqrt{x}} dx = \frac{\pi}{3} \int_0^3 (3 - x)(x+1) dx = 3\pi.$$

3.15 Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  вокруг ее оси симметрии (рис. 3.17).

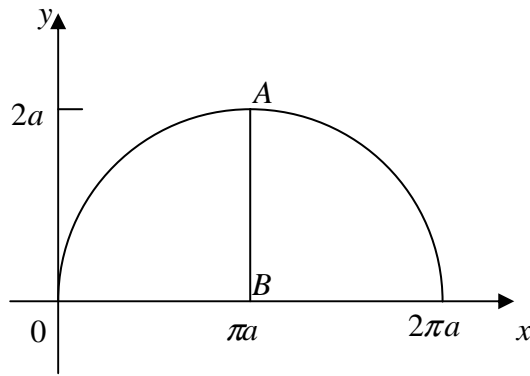


Рис. 3.17

Решение:

Искомая поверхность образуется вращением дуги  $OA$  вокруг прямой  $AB$ , уравнение которой  $x = \pi a$ . Принимая  $y$  за независимую переменную и учитывая, что ось вращения  $AB$  сдвинута относительно координатной оси  $OY$  на расстоянии  $\pi a$ , будем иметь (используя формулу (3.4)):

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_0^{\pi} (\pi a - at + a \sin t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = 2\pi \int_0^{\pi} (\pi a - at + a \sin t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = \\
 &= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \left( \pi \sin \frac{t}{2} - t \sin \frac{t}{2} + \sin t \sin \frac{t}{2} \right) dt = 4\pi a^2 \left[ -2\pi \cos \frac{t}{2} + 2t \cos \frac{t}{2} - 4 \sin \frac{t}{2} + \frac{4}{3} \sin^3 \frac{t}{2} \right]_0^{\pi} = \\
 &= 8\pi \left( \pi - \frac{4}{3} \right) a^2.
 \end{aligned}$$

### **3.3 Объем тела**

#### **3.3.1 Объем цилиндрических тел.**

Объем  $V$  цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью  $z = f(x, y)$ , снизу плоскостью  $z = 0$  и с боков прямой цилиндрической поверхностью, т.е. ее образующая параллельна оси  $OZ$ , вырезающей на плоскости  $XOY$  область  $S$  (Рис. 3.18)

$$V = \iint_S f(x, y) dS \quad (3.5)$$

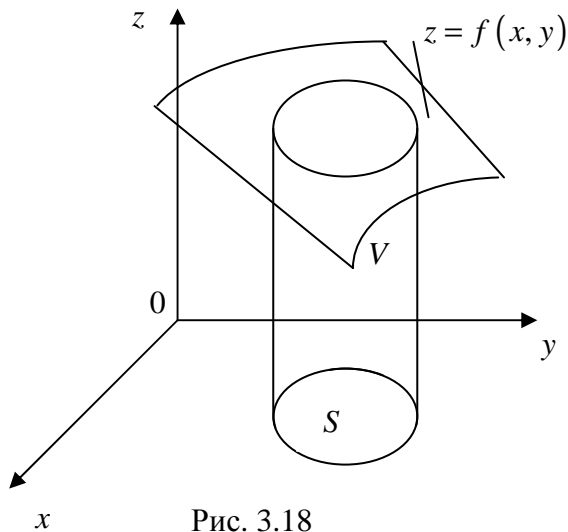


Рис. 3.18

3.17 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $x=0, y=0, x+y+z=1, z=0$ . (рис. 3.19)

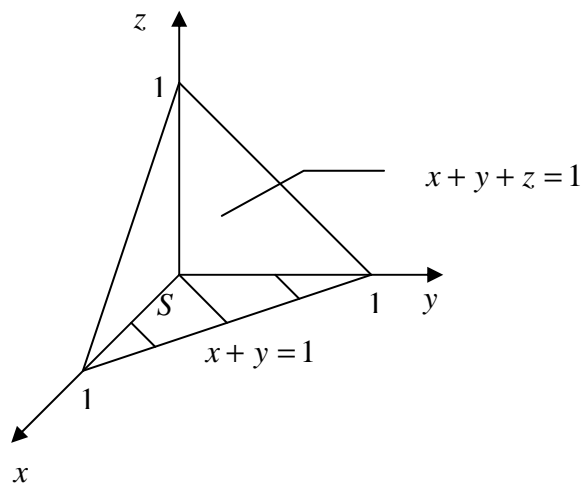


Рис. 3.19

Решение:

$$V = \iint_S (1-x-y) dy dx,$$

здесь  $S$  - заштрихованная на рис. 3.19 треугольная область – есть проекция плоскости  $x+y+z=1$  на плоскость  $XOY$ , ограниченная прямыми  $x=0$ ;  $y=0$ ;  $x+y=1$ .

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \int_0^1 \left( y - xy - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{8}.$$

3.18 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью  $z=9-x^2$  и плоскостями  $2x+y=6, z=0, y=0$ . (Рис. 3.20)

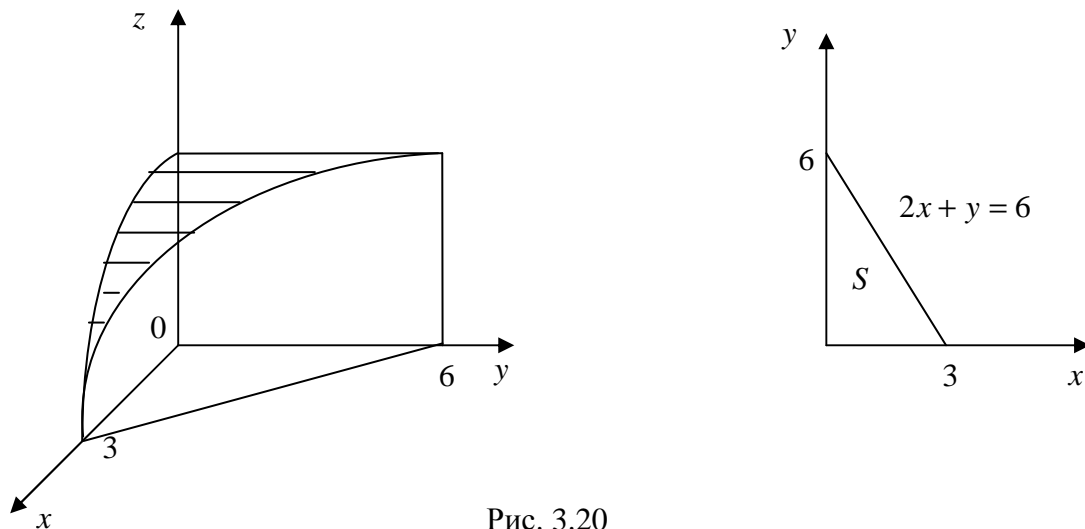


Рис. 3.20

Решение:

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_S (9 - x^2) dS = \int_0^3 dx \int_0^{6-2x} (9 - x^2) dy = \int_0^3 (9 - x^2) dx \cdot y \Big|_0^{6-2x} = \int_0^3 (9 - x^2)(6 - 2x) dx = \\
 &= \left( 54x - 2x^2 + \frac{(9 - x^2)^2}{2} \right) \Big|_0^3 = 67,5.
 \end{aligned}$$

3.19 Вычислить объем тела, ограниченного сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  и цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$ . (Рис. 3.21)

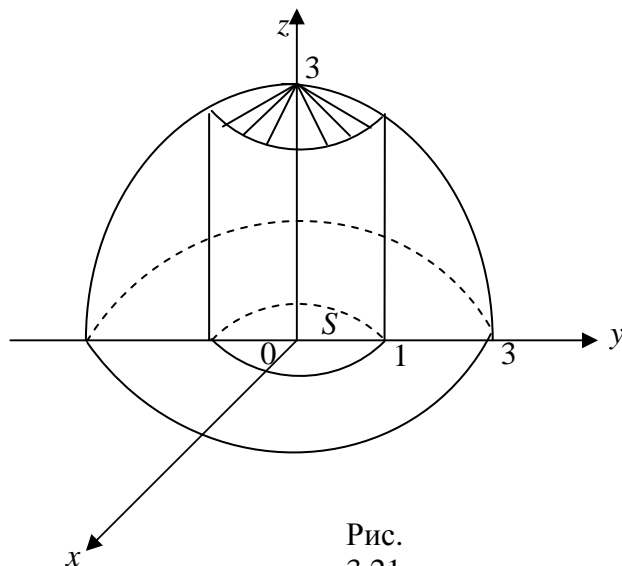


Рис.  
3.21

Решение:

Вычислим объем части тела, расположенного выше плоскости  $XOY$  и удвоим его. Область  $S$  - круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

$$V = 2 \iint_S \sqrt{9 - x^2 - y^2} ds.$$

Перейдем к полярным координатам

$$V = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{9-r^2} r dr = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{9-r^2} d(9-r^2) = -2\pi \frac{2}{3} (9-r^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3} (27-8\sqrt{8}).$$

### 3.3.2 Вычисление объема тела с помощью тройного интеграла.

3.20 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $hz = x^2 + y^2$ ;  $z = h$  (рис. 3.22)

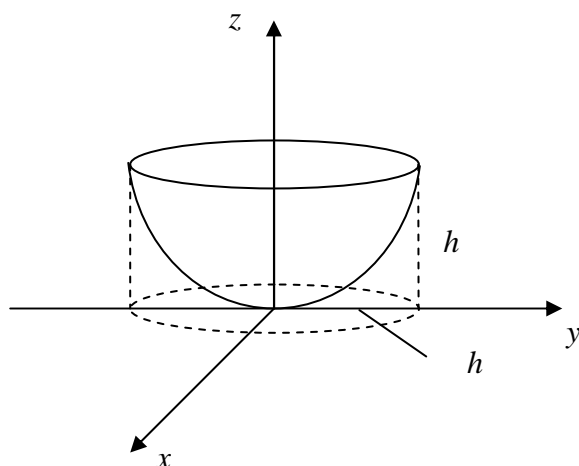


Рис. 3.22

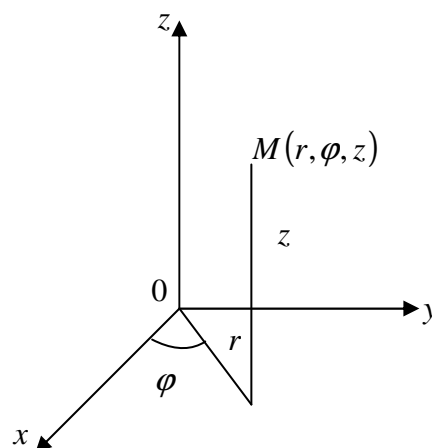


Рис. 3.22 а

Решение:

Данное тело ограничено снизу параболоидом  $z = \frac{(x^2 + y^2)}{h}$ , сверху плоскостью  $z = h$  проектируется в круг  $x^2 + y^2 \leq h^2$  плоскости  $XOY$ .

Используя цилиндрические координаты, в которых уравнение параболоида примет вид  $z = \frac{r^2}{h}$ , объем тела равен

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (\text{рис. 3.22a})$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R dx dy dz = \iiint_R r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_{r^2/h}^h dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left( h - \frac{r^2}{h} \right) r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{hr^2}{2} - \frac{r^4}{4h} \right) \Big|_0^h d\varphi = \left( \frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{4} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi h^3}{2}. \end{aligned}$$

3.21. Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $2x^2 = y$ ,  $2x + y + z - 4 = 0$ ;  $4x + 2y + z - 8 = 0$ .

Здесь  $2x^2 = y$  - параболический цилиндр с образующей, параллельной оси  $OZ$ ,  $2x + y + z = 4$ ;  $4x + 2y + z = 8$  - плоскости, пересекающие оси координат в точках (2,4,4)

и (2,4,8) соответственно. Очевидно, что обе плоскости пересекают плоскость  $XOY$  по одной и той же прямой  $y = 4 - 2x$

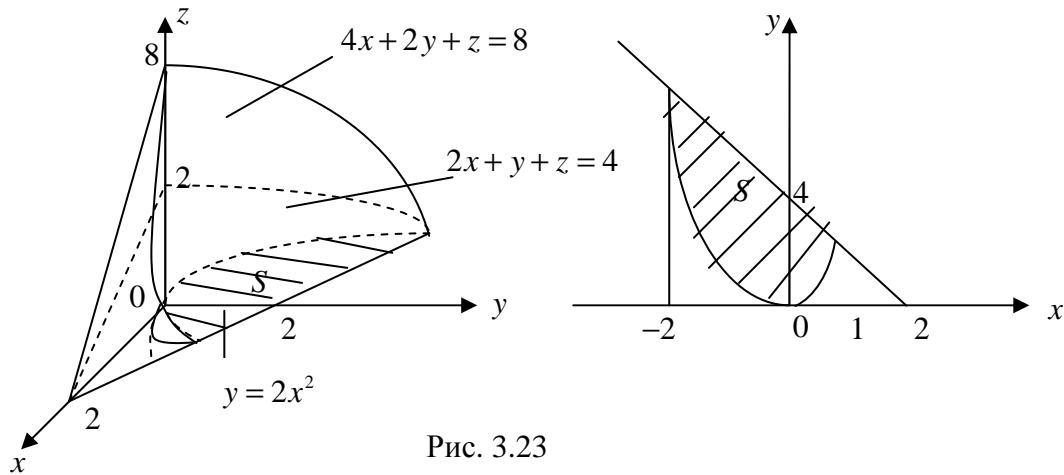


Рис. 3.23

Тело  $R$  (Рис. 3.23) есть часть параболического цилиндра, ограниченного снизу плоскостью  $z = 4 - 2x - y$ , а сверху – плоскостью  $z = 8 - 4x - 2y$ . Область  $S$  – (проекция на ось  $XOY$  отсеченного цилиндра) – сегмент параболы  $y = 2x^2$ , отсеченный прямой  $y = 4 - 2x$ . Точки пересечения параболы с прямой определяются путем совместного решения уравнений этих линий.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x^2 \\ y = 4 - 2x \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x^2 = 4 - 2x \\ y = 2x^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = -2, \quad x_2 = 1 \\ y_1 = 8, \quad y_2 = 2. \end{array}$$

Объем тела  $R$  вычисляем по формуле:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R dV = \iint_S \int_{4-2x-y}^{8-4x-2y} dz = \int_{-2}^1 dx \int_{2x^2}^{4-2x} (4-2x-y) dy = \\ &= -\int_{-2}^1 dx \frac{(4-2x-y)^2}{2} \Big|_{2x^2}^{4-2x} = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (4-2x-2x^2)^2 dx = 2 \left( 4x - 2x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_{-2}^1 = 16,2. \end{aligned}$$

3.22 Вычислить объем тела, ограниченного параболоидами  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ;  $z = x^2 + y^2 + 1$ . (рис. 3.24)

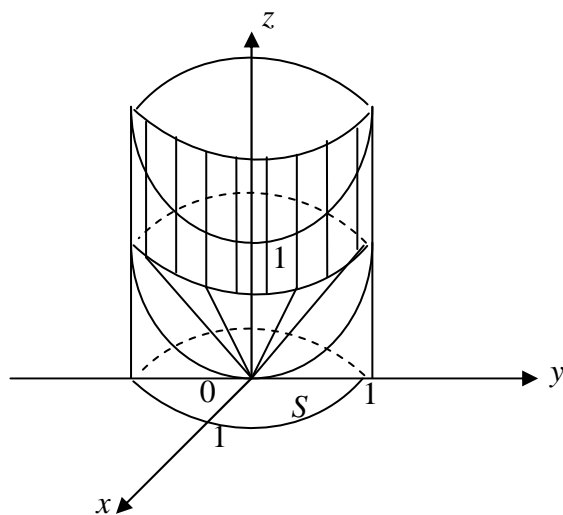


Рис. 3.24

Решение:

$S$  - проекции тела  $R$  на плоскость  $XOY$  - круг радиуса = 1. Поверхность входа  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , поверхность выхода  $z = x^2 + y^2 + 1$ .

$$V = \iint_S dS \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{x^2+y^2+1} dz = \iint_S dS z \Big|_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{x^2+y^2+1} = \iint_S \left( \frac{x^2 + y^2}{2} + 1 \right) dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left( \frac{r^2}{2} + 1 \right) r dr = 2\pi \left( \frac{r^4}{8} + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{5\pi}{4}.$$

### 3.3.3 Объем тел вращения.

Объем тела вращения. Объемы тел, образованных вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , осью  $OX$  и двумя вертикальными прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , вокруг оси  $OX$ , выражается формулой:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (3.6)$$

Если же вокруг оси  $OY$ , то выражается формулой:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x y dx \quad (3.7)$$

В том случае, если объем тела, образованного вращениями вокруг оси  $OY$  фигуры, ограниченной кривой  $x = g(y)$ , осью  $OY$  и двумя прямыми  $y = c$  и  $y = d$ , то он определяется формулой:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy \quad (3.8)$$

В более общем случае объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной кривыми  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$ , при этом  $f_1(x) \leq f_2(x)$  и прямыми  $x = a$  и  $x = b$  вокруг координатных осей  $OX$  и  $OY$ , соответственно равны:

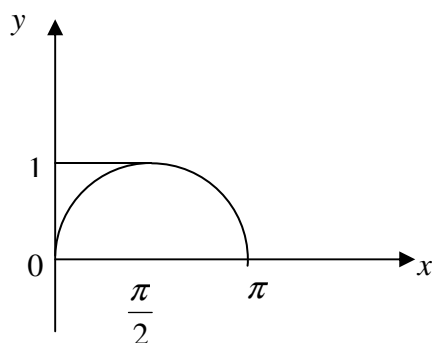
$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx \quad (3.9)$$



$$V_y = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx \quad (3.10)$$

В случае, если кривая задана в других координатах (полярных, параметрических), то в формулах 3.6 – 3.10 следует так же перейти к соответствующим координатам.

3.23 Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной одной половиной синусоиды  $y = \sin x$  и отрезком  $0 \leq x \leq \pi$  оси  $OX$ , вокруг а) оси  $OX$  и б) оси  $OY$ . (рис. 3.25)



$$V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 x = \frac{\pi^2}{2}; \quad V_y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi (-x \cos x + \sin x) \Big|_0^\pi = 2\pi^2.$$

3.24 Найти объем тора, образованного вращением круга  $x^2 + (y-b)^2 \leq a^2; (b \geq a)$ , вокруг оси  $OX$ . (рис. 3.26)

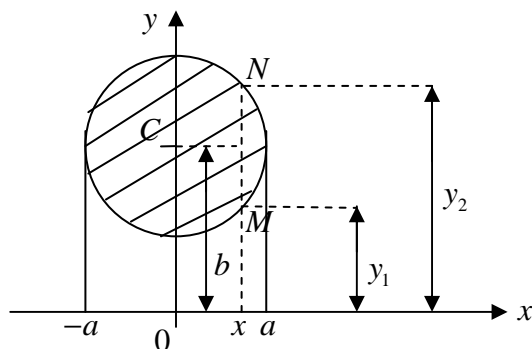


Рис. 3.26

Решение:

$$y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2}; \quad y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$V_x = \pi \int_{-a}^a \left[ (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \right] dx = 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b.$$

Пусть, объем тела получен в результате вращения сектора, ограниченного дугой кривой  $r = F(\varphi)$  и двумя полярными радиусами  $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ , вокруг полярной оси, может быть вычислен по формуле:

$$V_r = \frac{2}{3} \pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin \varphi d\varphi \quad (3.11)$$

3.25 Найти объем тела, образованный вращением кривой  $r = a \sin 2\varphi$  полярной оси.

Решение:

$$V_r = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{32}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{64}{105} \pi a^3.$$

3.26 Вычислить объем тела, образованного вращением кривой  $y = \operatorname{ctg} x; \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  вокруг оси  $OX$ . (рис. 3.22)

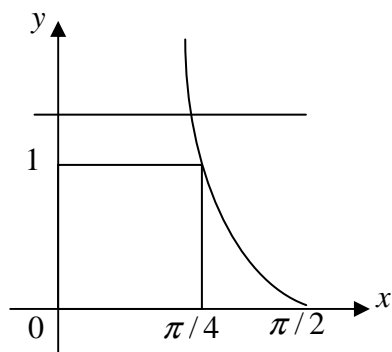


Рис. 3.27

Решение:

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x dx = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \pi \left( -\operatorname{ctg} x - x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi - \frac{\pi^2}{4}.$$

3.27 Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой  $y^2 = 8x$  и прямой  $x = 2$ , вокруг этой прямой. (рис. 3.28)

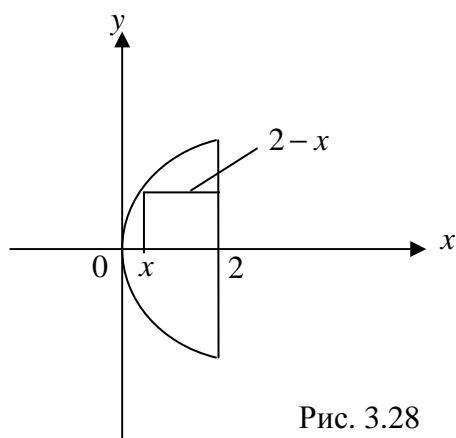


Рис. 3.28

Решение:

$$V = \pi \int_{-4}^4 (2 - x)^2 dy = \pi \int_{-4}^4 \left( 2 - \frac{y^2}{8} \right) dy = 2\pi \int_0^4 \left( 4 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{64} y^4 \right) dy = \frac{128}{3} \pi.$$

#### 4. Приложения определенного в механике.

Интеграл по фигуре применяется при вычислении массы, статических моментов и моментов инерции фигур, при нахождении положения центра тяжести.

##### 4.1 Определение массы фигуры

Известно, что масса любой фигуры может быть определена, если известна длина, площадь или объем фигуры и плотность в каждой т. фигуры так, если фигура-

отрезок, то масса  $M$  его определяется формулой  $M = \int_a^b \rho dx$ , (1)

где  $\rho(x)$  – плотность.

Плоская линия  $\Gamma$  -  $M = \int_{\Gamma} \rho dL$  (2)

Пространственная линия  $\Gamma$  -  $M = \int_{\Gamma} \rho dL$  (3)

Плоская область  $S$  -  $M = \iint_S \rho(x, y) dS$  (4)

Пространственная поверхность  $Q$  -  $M = \iiint_Q \rho(x, y, z) dq$  (5)

Пространственное тело  $R$  -  $M = \iiint_R \rho(x, y, z) dV$  (6)

4.1 Найти массу  $M$  дуги кривой  $x = t, y = \frac{1}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3 (0 \leq t \leq 1)$ , линейная плотность которой меняется по закону  $\rho = \sqrt{2y}$ .

Решение:

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Gamma} \sqrt{2y} dL = \int_0^1 \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}t^2} \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2} dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1+t^2+t^4} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} d\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{t^2 + \frac{1}{2}}{2} \sqrt{t^4 + t^2 + 1} + \frac{3}{8} \ln \left( t^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{t^4 + t^2 + 1} \right) \right] \Bigg|_0^1 = \\ &= \frac{1}{8} \left( 3\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{2} \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \right). \end{aligned}$$

4.2 Найти массу пластинки, ограниченной эллипсом  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ , если плотность в каждой точке равна расстоянию от точки до оси  $OX$ . (рис. 4.1)

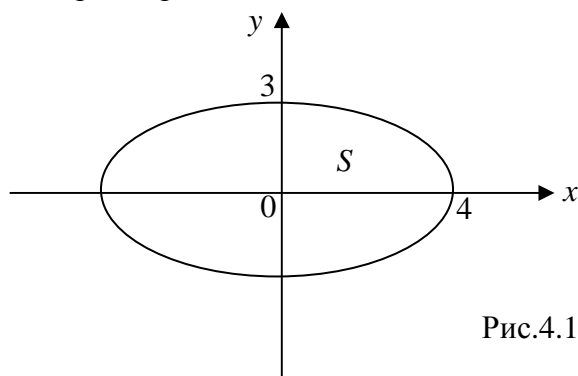


Рис.4.1

Решение:

Заметим, что в точках симметричных относительно оси  $OX$ , плоскость одинакова ( $\rho(x, y) = |y|$ ), следовательно

$$M = 2 \iint_S y dS,$$

где  $S$  - часть пластинки, расположенная выше оси  $OX$ .

$$M = 2 \int_{-4}^4 dx \int_0^{\sqrt[3]{1-\frac{x^2}{16}}} y dy = \int_{-4}^4 dx y^2 \Big|_0^{\sqrt[3]{1-\frac{x^2}{16}}} = 9 \int_{-4}^4 \left(1 - \frac{x^2}{16}\right) dx = \left(9x - \frac{3x^3}{16}\right) \Big|_{-4}^4 = 48.$$

4.3 Найти массу оболочки, заданной уравнениями  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , если плотность в каждой точке  $\rho = z$ .

$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  - параболоид вращения с осью вращения  $OZ$ , ограниченный сверху плоскостью  $z = 1$  (рис. 4.2.).

Линия пересечения параболоида с плоскостью  $z = 1$  - окружность  $x^2 + y^2 = 2$ .

Следовательно проекция оболочки на плоскость  $XOY$  - круг  $x^2 + y^2 = 2$ .

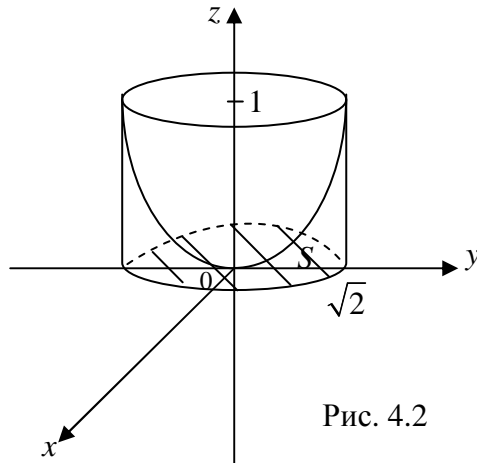


Рис. 4.2

Решение:

$$\begin{aligned} M &= \iint_Q \rho dq = \iint_S z(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_S \frac{x^2 + y^2}{2} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ r = \sqrt{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \iint_S r^2 \sqrt{1 + r^2} r dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r=\sqrt{2}} (1 + r^2)^{1/2} r^3 dr = \\ &= \left| \begin{array}{l} r^2 + 1 = t^2; t dt = r dr \\ r = 0; t_1 = 0; r = \sqrt{2}; t_2 = \sqrt{3} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{t=1}^{t=\sqrt{3}} t(t^2 - 1) t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{9\sqrt{3}}{5} - \sqrt{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \frac{12\sqrt{3} + 2}{15} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi(12\sqrt{3} + 2)}{15}. \end{aligned}$$

4.4 Найти массу тела, ограниченного поверхностями  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 1$ , если плотность  $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . (рис. 4.3)

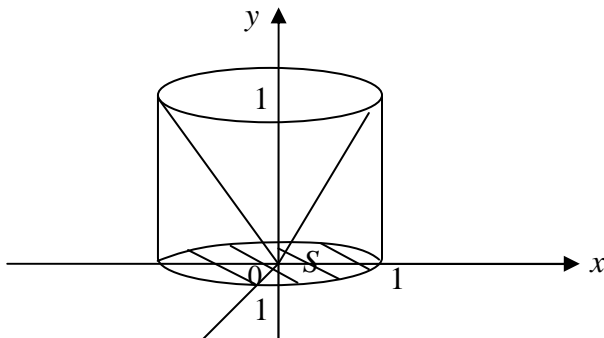


Рис. 4.3

Решение:

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$  - конус.

Линия пересечения конуса с плоскостью  $z = 1$ , есть круг  $x^2 + y^2 = 1$ , проекция конуса на плоскость  $XOY$  -  $S$  -  $x^2 + y^2 = 1$ .

$$M = \iiint_R \rho(x, y, z) dV = \iint_S dS \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^1 \sqrt{x^2 + y^2} dz = \iint_S (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{x^2 + y^2} dS = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = 1 \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r) r^2 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

#### 4.2 Определение статических моментов, моментов инерции и центра тяжести.

Если фигура однородна (плотность  $\rho = const$ ) и имеет ось или плоскость симметрии, то статический момент относительно этой оси или плоскости равен нулю.

Если же имеется центр симметрии, то статический момент относительно любой оси, проходящий через центр, равен нулю.

При наличии у однородной фигуры плоскости, оси или центра симметрии, центр тяжести лежит на этой плоскости, оси или в центре симметрии. (Таблица).

	Отрезок [a, b] на оси OX	Плоская линия $\Gamma$	Плоская область $S$	Простран- ственная линия $\Gamma$	Простран- ственная поверх- ность $Q$	Простран- ственное тело $R$
Статический момент отно- сительно: осей $OX, OY : M_x, M_y$ плоскостей $XOZ, YOZ; XOY$	$M_x = 0$ $M_y = \int_b^a x \rho dx$	$M_x = \int_{\Gamma} y \rho$ $M_y = \int_{\Gamma} x \rho$	$M_x = \iint_S y \rho$ $M_y = \iint_S x \rho$	$M_{xy} = \int_{\Gamma} z \rho dl$ $M_{xz} = \int_{\Gamma} y \rho dl$ $M_{yz} = \int_{\Gamma} x \rho dl$	$M_{xy} = \iint_Q z \rho d\sigma$ $M_{xz} = \iint_Q y \rho d\sigma$ $M_{yz} = \iint_Q x \rho d\sigma$	$M_{xy} = \iiint_R z \rho dV$ $M_{xz} = \iiint_R y \rho dV$ $M_{yz} = \iiint_R x \rho dV$
Координаты $X_c, Y_c, Z_c$ , центра тяже- сти	$X_c = \frac{M_y}{M}$	$X_c = \frac{M_y}{M}$	$Y_c = \frac{M_x}{M}$	$X_c = \frac{M_{yz}}{M}$	$Y_c = \frac{M_{xz}}{M}$	$Z_c = \frac{M_{xy}}{M}$
Момент инер- ции относи- тельно	$Y_0 = \int_b^a x^2 \rho dx$	$Y_0 = \int_{\Gamma} x^2 \rho$	$Y_0 = \iint_S x^2 \rho$	$Y_0 = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) \rho dl$	$Y_0 = \iint_Q (x^2 + y^2) \rho d\sigma$	$Y_0 = \iiint_R (x^2 + y^2) \rho dV$
Начала коор- динат:		$Y_x = \int_{\Gamma} y^2 \rho$	$Y_x = \iint_S y^2 \rho$	$Y_x = \int_{\Gamma} (y^2 + z^2) \rho dl$	$Y_x = \iint_Q (y^2 + z^2) \rho d\sigma$	$Y_x = \iiint_R (y^2 + z^2) \rho dV$
$Y_0$ - полярный момент		$Y_y = \int_{\Gamma} x^2 \rho$	$Y_y = \iint_S x^2 \rho$	$Y_y = \int_{\Gamma} (x^2 + z^2) \rho dl$	$Y_y = \iint_Q (x^2 + z^2) \rho d\sigma$	$Y_y = \iiint_R (x^2 + z^2) \rho dV$
Осей коорди- нат $OX, OY, OZ$				$Y_z = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) \rho dl$	$Y_z = \iint_Q (x^2 + y^2) \rho d\sigma$	$Y_z = \iiint_R (x^2 + y^2) \rho dV$
$Y_x, Y_y, Y_z$				$Y_{xy} = \int_{\Gamma} z^2 \rho dl$	$Y_{xy} = \iint_Q z^2 \rho d\sigma$	$Y_{xy} = \iiint_R z^2 \rho dV$
Координат- ных плоско- стей $XOY, XOZ, YOZ$				$Y_{xz} = \int_{\Gamma} y^2 \rho dl$	$Y_{xz} = \iint_Q y^2 \rho d\sigma$	$Y_{xz} = \iiint_R y^2 \rho dV$
$Y_{xy}, Y_{xz}, Y_{yz}$				$Y_{yz} = \int_{\Gamma} x^2 \rho dl$	$Y_{yz} = \iint_Q x^2 \rho d\sigma$	$Y_{yz} = \iiint_R x^2 \rho dV$

4.5 Найти массу, статический момент относительно оси  $OX$ , а также координаты центра тяжести для пластины, ограниченной линиями  $y^2 = x$ ,  $x = 2$ , если плотность  $\rho = |y|$ . (рис. 4.4)

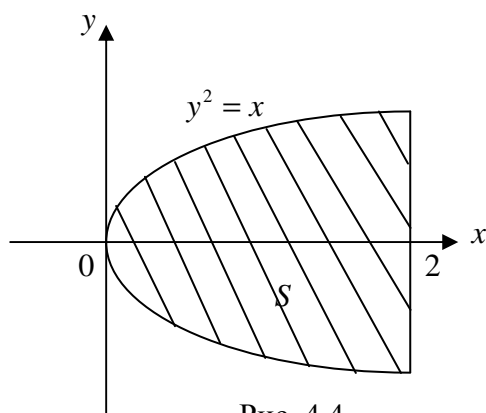


Рис. 4.4

Решение:

Фигура симметрична относительно оси  $OX$ .

Значения плотности также симметричны относительно оси  $OX$ .

$$M = \iint_S \rho dS = \iint_S y dS = 2 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy = 2 \int_0^2 dx \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{x}} = 2 \int_0^2 x dx = 2$$

$$M_y = \iint_S x \rho dS = 2 \int_0^2 x dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy = \int_0^2 dx (x \cdot y^2) \Big|_0^{\sqrt{x}} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

$$Y_x = \iint_S y^2 \rho dS = 2 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{x}} y^3 dy = 2 \int_0^2 dx \left( \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}$$

$$X_c = \frac{M_y}{M} = \frac{8}{3 \cdot 2} = \frac{4}{3}; \quad Y_c = 0, \text{ так как ось } OX - \text{ ось симметрии}$$

$$\text{Ответ: } M = 2; M_y = \frac{8}{3}; Y_x = \frac{4}{3}; C\left(\frac{4}{3}, 0\right).$$

4.6 Вычислить массу, статический момент относительно оси  $OX$  и момент инерции относительно  $OY$  пластины, определить координаты центра тяжести, пластина ограничена линиями  $y = x^2$ ,  $y = 1$ , если плотность  $\rho(x, y) = 2y$ . (рис. 4.5)

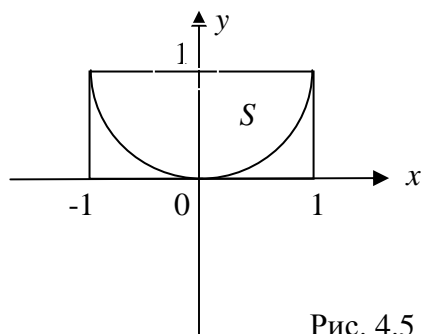


Рис. 4.5

Решение:

$$M \iint_S \rho(x, y) dS = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 2y dy = \int_{-1}^1 dx y^2 \Big|_{x^2}^1 = \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = 1,6$$

$$M_x = \iint_S y \rho dS = 2 \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y^2 dy = 2 \int_{-1}^1 dx \frac{y^3}{3} \Big|_{x^2}^1 = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (1 - x^6) dx = \frac{2}{3} \left( x - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{7}$$

$$Y_y = \iint_S x^2 \rho dS = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 2x^2 y dy = \int_{-1}^1 dx x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1 = \int_{-1}^1 (x^6 - x^2) dx = \frac{4}{15}$$

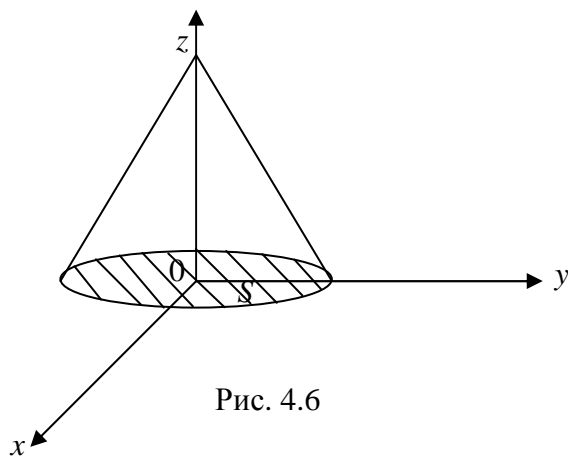
$$Y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{5}{7}; \quad X_c = 0 \text{ (ось } OY \text{ - ось симметрии)}$$

$$\text{Ответ: } M = 1,6; \quad M_x = \frac{8}{7}; \quad Y_y = \frac{4}{15}; \quad C \left( 0, \frac{5}{7} \right).$$

4.7. Найти координаты центра тяжести конического тела, ограниченного поверхностями  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 0$  и имеющего плотность  $\rho = 1$ .

Коническая поверхность  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  имеет ось симметрии  $OZ$  и вершину в т.  $(0, 0, 1)$ .

Положив в уравнении  $z = 0$ , найдем линию ее пересечения с плоскостью  $XOY$ :  $x^2 + y^2 = 1$ . Таким образом, данное коническое тело проецируется на плоскость  $XOY$  в круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ . В силу симметрии относительно оси  $OZ$  его центр тяжести лежит на этой оси, т.е.  $x_c = 0$ ,  $y_c = 0$ . (рис. 4.6.)



Решение:

$$M = \iiint_R \rho dV = \iiint_R dV = \iint_S dS \int_{z=0}^{z=1-\sqrt{x^2+y^2}} dz = \iint_S (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dS = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = 1 \end{array} \right|$$

$$= \iint_S (1 - r) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r) r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{3};$$



$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iiint_R z \rho dV = \iiint_R z dV = \iint_S dS \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} z dz = \frac{1}{2} \iint_S dS \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2) r dr = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(z - 2r^2 + r^3\right) dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{2}{3}r^3 + \frac{1}{4}r^4\right) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{12} \\
x_c &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{3}{\pi} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $C(0, 0, \frac{1}{4})$ .

4.8. Найти координаты центра тяжести  $\rho = 1$  призматического тела ограниченного плоскостями  $x = 0$ ;  $z = 0$ ;  $y = 1$ ,  $y = 3$ ,  $x + 2z = 3$  (рис. 4.7)

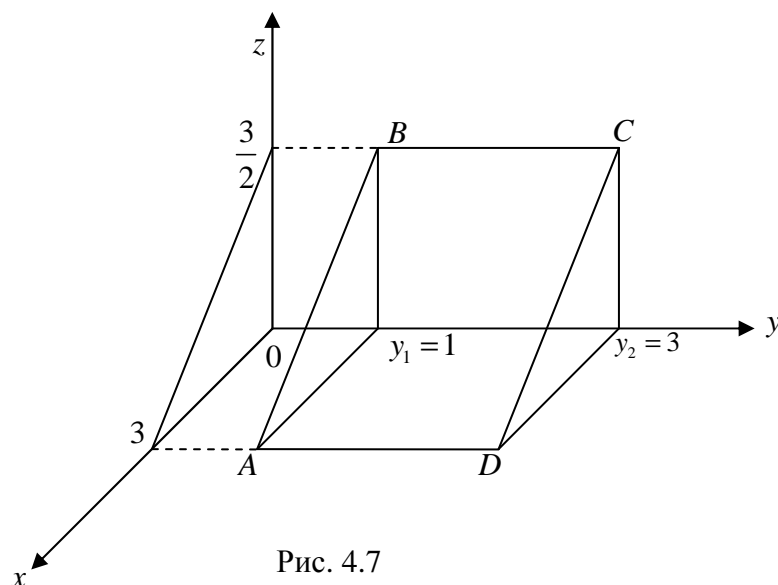


Рис. 4.7

Решение:

Рассмотрим тело  $R \text{ } ABY_1CY_2D$

$$M \iiint_R \rho dx dy dz = \int_0^3 dx \int_1^3 dy \int_0^{\frac{(3-x)}{2}} dz = \int_0^3 dx \int_1^3 \frac{3-x}{2} dy = \int_0^3 (3-x) dx = \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

$$X_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{2}{9} \iiint_R x \rho dx dy dz = \frac{2}{9} \int_0^3 x dx \int_1^3 dy \int_0^{\frac{(3-x)}{2}} dz = \frac{2}{9} \int_0^3 x(3-x) dx = \frac{2}{9} \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x^2\right) \Big|_0^3 = 1.$$

$$Y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{2}{9} \iiint_R y \rho dx dy dz = \frac{4}{9} \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_0^3 = 2.$$

$$Z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2}{9} \iiint_R z \rho dx dy dz = \frac{1}{18} \left[\frac{-(3-x)^2}{3}\right] \Big|_0^3 = \frac{1}{2}.$$

Ответ:  $X_c = 1$ ,  $Y_c = 2$ ,  $Z_c = \frac{1}{2}$ .

4.9 Найти массу и момент инерции относительно начала координат пластинки, ограниченной линиями  $x^2 + y^2 = x$ ;  $x^2 + y^2 = 2x$ ;  $\rho(x, y) = x$ . (Рис. 4.8)

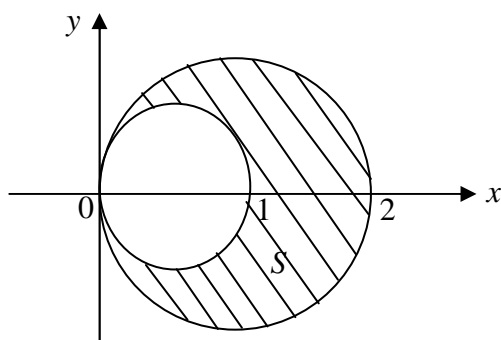


Рис. 4.8

Решение:

Перейдем к полярной системе координат  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$

$$x^2 + y^2 = x \rightarrow r = \cos \varphi$$

$$r^2 = r \cos \varphi$$

$$x^2 + y^2 = 2x \rightarrow r = 2 \cos \varphi$$

$$r^2 = 2r \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \rho dS = \iint_S x dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} r^2 \cos \varphi dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left. \frac{r^3}{3} \cos \varphi \right|_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} = \frac{7}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= \left| \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right| = \frac{7}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos 2\varphi)^2}{4} d\varphi = \frac{7}{12} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= \frac{7}{12} \left( \varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{8} \pi. \end{aligned}$$

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) \rho dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} r^4 \cos \varphi \cdot dz = \frac{31}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{31}{16} \pi$$

4.10 Найти полярный момент инерции круга  $x^2 + y^2 = 2ax$ ;  $\rho = 1$ . (рис 4.9)

Преобразуем исходное уравнение:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2; (x - a)^2 + y^2 = a^2$$

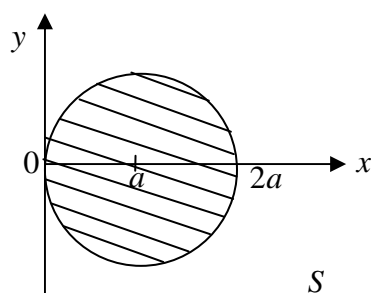


Рис. 4.9

Решение:

В полярных координатах круг имеет вид

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$\rightarrow r = 2a \cos \varphi$$

$$r^2 = 2ar \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_S (x^2 + y^2) \rho dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{S_r=2a \cos \varphi} r^3 dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{2a \cos \varphi} = 4a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= 4a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos 2\varphi^2)}{4} d\varphi = a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + 2 \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = a^4 \left( \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{6} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= a^4 \frac{3}{2} \pi \end{aligned}$$

4.11 Найти центр тяжести однородной полуокружности  $x^2 + y^2 = a^2$ , расположенной над осью  $OX$  и имеющую плотность  $\rho = |x|$ . (рис. 4.10)

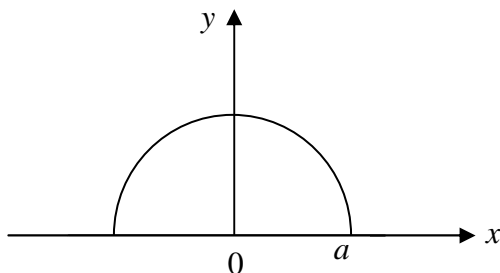


Рис. 4.10

Решение:

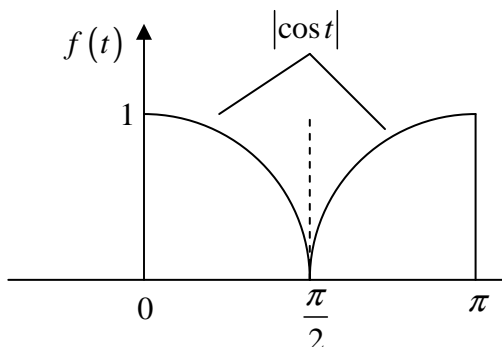
Фигура является симметричной относительно оси  $OY$ , поэтому  $X_c = 0$ .

Найдем массу линии, представив ее уравнение в параметрическом виде  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ , где пределы изменения параметра  $t$  соответствуют значениям координаты  $x$  на концах линии:

$$x = a; \cos t_1 = 1 \rightarrow t_1 = 0; \quad x = -a; \cos t_2 = -1 \rightarrow t_2 = \pi.$$

$$M = \int_{\Gamma} \rho dL = \int_{\Gamma} |x| dL = \int_{t_1}^{t_2} |a \cos t| \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = a \int_0^{\pi} |\cos t| \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = a^2 \int_0^{\pi} |\cos t| dt =$$

Рассмотрим график функции  $|\cos t|$  при  $0 \leq t \leq \pi$ .



Он симметричен относительно линии  $t = \frac{\pi}{2}$ , следовательно:

$$= \left[ \int_0^{\pi} |\cos t| dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot dt \right] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2a^2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2.$$

При вычислении статического момента используем ранее предложенное относительно  $|\cos t|$ .

$$M_x = \int_{\Gamma} \rho y dL = \int_{\Gamma} |x| y dL = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \sin t dt = 2a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = -2a^3 \frac{\cos^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^3.$$

$$Y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{a^3}{2a^2} = \frac{a}{2}.$$

Ответ:  $M = 2a^2$ ;  $M_x = a^3$ ;  $X_C = 0$ ;  $Y_C = \frac{a}{2}$ .

4.12 Найти момент инерции относительно плоскости  $XOY$  первого витка линии  $y = a \sin t$ ,  $x = a \cos t$ ,  $z = bt$ . (рис. 4.11), если плотность в каждой точке равна  $\rho = x^2 + y^2 + z^2$ .

Пределы изменения  $t$  найдем из условия, что в конце первого витка координаты  $x$  и  $y$  принимают такие же значения, что и в начале витка:  $x = a$ ;  $a \cos t = a$ ;  $\cos t = 1$ . Значит  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 2\pi$ .

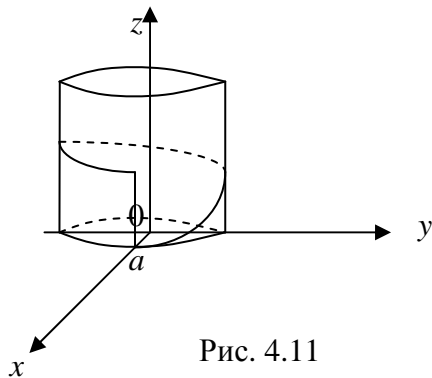


Рис. 4.11

Решение:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_{\Gamma} z^2 \rho dL = \int_{\Gamma} z^2 (x^2 + y^2 + z^2) dL = \int_0^{2\pi} b^2 t^2 (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \\ &= b^2 \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 t^2 + b^2 t^4) dt = b^2 \sqrt{a^2 + b^2} \left( a^2 \frac{t^3}{3} + b^2 \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8\pi^3 b^2 \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{4}{5} \pi^2 b^2 \right). \end{aligned}$$

4.13 Найти координаты центра тяжести фигуры ограниченной линиями  $y^2 = 4x + 4$ ;  $y^2 = -2x + 4$ ;  $\rho = 1$ . (рис. 4.12)

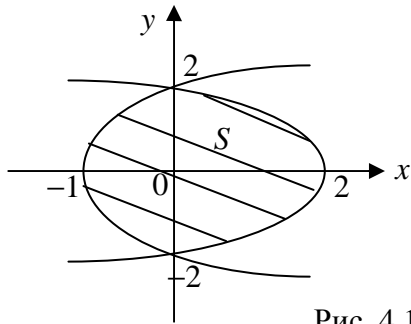


Рис. 4.12

Решение:

Так как фигура симметрична относительно оси  $OX$ , то  $Y_c = 0$

$$M = \iint_S \rho dx dy = 2 \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dx = 2 \int_0^2 \left[ \frac{1}{2}(4-y^2) - \frac{1}{4}(y^2-4) \right] dy = 2 \int_0^2 \left( 3 - \frac{3}{4}y^2 \right) dy = 6 \left( y - \frac{1}{12}y^3 \right) \Big|_0^2 = 8$$

$$X_c = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{8} \iint_S x dx dy = \frac{1}{8} \cdot 2 \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} x dx = \frac{1}{8} \int_0^2 \left[ \frac{1}{4}(4-y^2)^2 - \frac{1}{16}(y^2-4)^2 \right] dy =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^2 \left( 3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{16}y^4 \right) dy = \frac{1}{8} \left( 3y - \frac{y^3}{2} + \frac{3}{80}y^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{5}.$$

Ответ:  $C\left(\frac{2}{5}, 0\right)$ .

4.14 Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной эллипсом

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  и его хордой  $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ ,  $\rho = 1$ . (рис. 4.13)

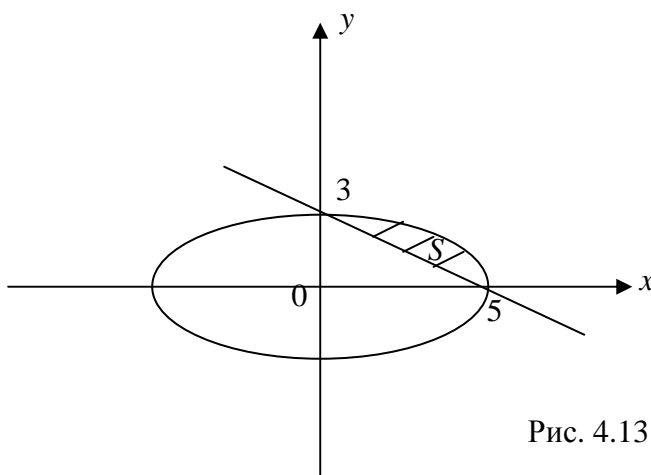


Рис. 4.13

Решение:

$$M = \iint_S \rho dx dy = \int_0^5 dx \int_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} dy = \int_0^5 \left( \frac{3}{5}\sqrt{25-x^2} - 3 + \frac{3}{5}x \right) dx = \left. \begin{array}{l} x = 5 \sin t; dx = 5 \cos t dt \\ x = 0 \rightarrow t_1 = 0; x = 5 \rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos t - 3 + 3 \sin t) 5 \cos t dt = 15 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \cos t + \sin t \cos t) dt = \frac{15}{4}(\pi - 2)$$

$$X_C = \frac{M_y}{M} = \frac{4}{15(\pi - 2)} \int_0^5 x dx \int_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} dy = \frac{4}{15(\pi - 2)} \int_0^5 \left[ \frac{3}{5} x \sqrt{25-x^2} - 3x \left( 1 - \frac{x}{5} \right) \right] dx =$$

$$= \frac{4}{15(\pi - 2)} \left[ -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (25-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{5} x^3 \right]_0^5 = \frac{10}{3(\pi - 2)}.$$

$$Y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{4}{15(\pi - 2)} \int_0^5 dx \int_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} y dy = \frac{2}{\pi - 2}.$$

Ответ:  $C \left( \frac{10}{15(\pi - 2)}; \frac{2}{\pi - 2} \right)$

4.15 Вычислить полярный момент инерции фигуры, ограниченной линиями

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \rho = 1. \quad (\text{рис. 4.14})$$

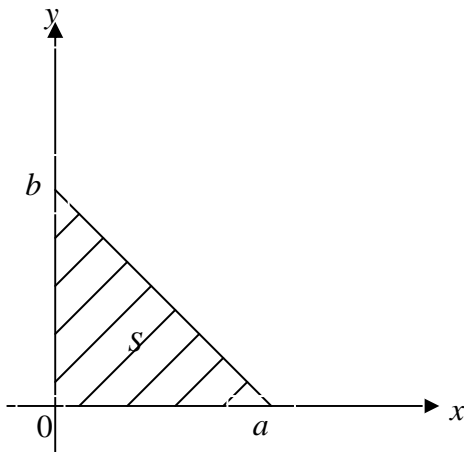


Рис. 4.14

Решение:

Найдем момент инерции относительно начала координат.

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} (x^2 + y^2) dy = \int_0^a \left[ x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dx = \int_0^a \left[ \frac{b}{a} x^2 (a-x) + \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^3} (a-x)^3 \right] dx =$$

$$= \left[ \frac{1}{3} b x^3 - \frac{b}{4a} x^4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} \frac{1}{4} (a-x)^4 \right]_0^a = \frac{ab(a^2 + b^2)}{12}.$$

4.16 Вычислить момент инерции фигуры, ограниченной кардиоидой  $r = a(1 + \cos \varphi)$ , относительно оси  $OX$ ,  $\rho = 1$ . (рис. 4.15)

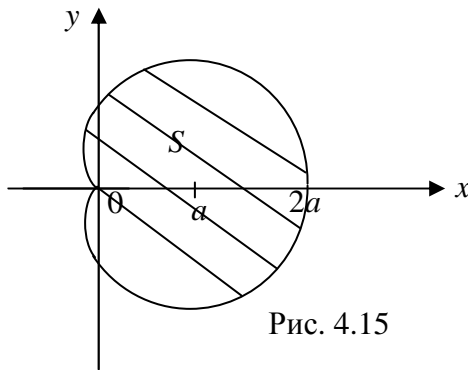


Рис. 4.15

Решение:

$$I_x = \iint_S y^2 dx dy = \left| \begin{array}{l} \text{перейдем к полярным} \\ \text{координатам} \end{array} \right| = \iint_S r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^3 dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{a(1+\cos \varphi)} d\varphi = \frac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot (1 + \cos \varphi)^4 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 + 4 \cos \varphi + 6 \sin^2 \varphi + 4 \cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi = \frac{21}{32} \pi a^4.$$

Литература.

1. А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. Краткий курс математического анализа. М. Наука, 1971
2. С.Я. Хавинсон. Лекции по интегральному исчислению. М. «Высшая школа», 1976
3. Задачи и упражнения по математическому анализу. Для ВТУЗОВ. М. Наука, 1972
4. В.И.Смирнов. Курс высшей математики том 1, 2. М. Наука, 1967